

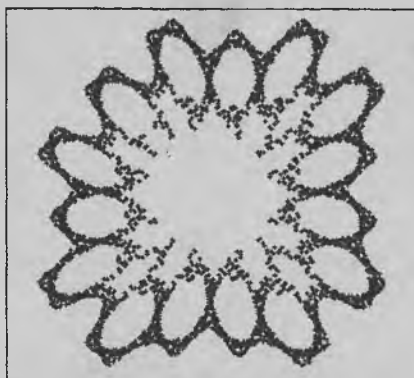
Московский государственный университет им. М.В.Ломоносова
факультет вычислительной математики и кибернетики



Б.М.Павлов, М.Д.Новиков

**Вычислительный практикум
по исследованию
нелинейных разностных систем
(итерируемых отображений)**

Учебное пособие для студентов факультета ВМК МГУ



Москва, 1998

УДК 519.6+517.938
ББК 22.18

58Г66
П-121

Павлов Б.М., Новиков М.Д. Вычислительный практикум по исследованию нелинейных разностных систем (итерируемых отображений). - Учебное пособие - М.: МГУ, 1998. - 78 с.

Издательский отдел факультета ВМК МГУ (лицензия ЛР №040777 от 23.07.96).

Учебное пособие посвящено изучению в компьютерном практикуме нелинейных математических моделей в виде систем разностных уравнений (итерируемых отображений) по методологии вычислительного эксперимента. В отличие от моделей в виде систем обыкновенных дифференциальных уравнений, которые только при размерности $N \geq 3$ могут порождать динамический (детерминированный) хаос, нелинейные отображения уже с размерности $N=1$ могут приводить к регулярной и хаотической (стохастической) динамике, что существенно упрощает изучение элементов динамики и синергетики. Основная цель пособия - научить студентов идентифицировать различные типы асимптотического поведения решений систем нелинейных отображений (их "самоорганизацию" в дискретном времени) в зависимости от значений параметров и начальных условий с помощью применения в студенческих программах интерактивного диалога и компьютерной графики для визуализации результатов вычислений. Для практикума из научной литературы и из Web-источников Internet отобраны и тщательно проверены авторами модели с богатым спектром поведения. Приведены краткие сведения из теории нелинейных отображений и краткий словарь терминов нелинейной динамики.

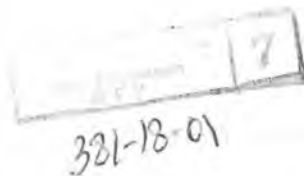
Для студентов университетов и вузов, обучающихся по специальностям "прикладная математика" и "информатика", а также для студентов - гуманитариев и школьников старших классов в качестве введения в мир простейших нелинейных моделей.

Рецензенты: В.Г.Сушко, д.ф.-м.н., профессор
С.И.Мухин, к.ф.-м.н., доцент

Печатается по решению Редакционно-издательского совета факультета вычислительной математики и кибернетики МГУ им.М.В.Ломоносова.

ISBN 5-89407-027-9

© Издательский отдел
факультета вычислительной
математики и кибернетики
МГУ им.М.В.Ломоносова
1998



Содержание

Предисловие	4
Раздел 1. Формулировка типового задания	7
1.1. Математическая модель типового задания	7
1.2. Требования к программе. Некоторые рекомендации	9
1.3. Как идентифицировать динамическое поведение модели	10
Раздел 2. Краткие теоретические сведения о нелинейных разностных системах (итерируемых отображениях)	13
2.1. Модели детерминированных систем	13
2.2. Точечные отображения. Основные понятия	14
2.3. Метод сечений и отображений Пуанкаре	16
2.4. Отображения: неподвижные точки, устойчивость, бифуркации	20
2.5. Показатели Ляпунова	25
2.6. Диаграмма Ламерея - Кенитса	29
2.7. Логистическое отображение. Последовательность неустойчивостей, ведущая к хаосу. Закон М.Фейгенбаума.	33
Бифуркационная диаграмма.	
2.8. Разностные системы с запаздывающими аргументами	37
2.9. Признаки хаотической динамики	39
2.10. Дополнительные способы идентификации динамики отображений	40
Раздел 3. Индивидуальные задания на нелинейные итерируемые отображения	43
3.1. Одномерные отображения	43
3.2. Системы двумерных и трехмерных отображений	48
Раздел 4. Иллюстративный материал (2D и 3D системы)	57
Раздел 5. Словарь терминов нелинейной динамики	68
Литература	77

Предисловие

"Вероятно, для всех нас было бы гораздо лучше, если бы не только при обучении или в научной работе, но и в повседневной политической и экономической жизни как можно большее число людей поняло, что простые динамические системы не обязательно приводят к простому поведению".

Р.Мэй

Современные учебные программы ряда передовых университетов и вузов России включают практикумы и лабораторные работы по математическому моделированию с применением компьютеров.

Успехи в преподавании и обучении студентов в практикумах зависят не столько от технической базы, сколько от традиционных средств: методики обучения, учебно-методических пособий, от хорошо продуманных и содержательных заданий и упражнений. Немалую роль играют возможности развития стимулов у студентов к творческой, исследовательской работе в процессе выполнения заданий практикума.

Содержательные модели с разнообразным и необычным поведением предоставляет нелинейная динамика, наука постоянно развивающаяся и имеющая междисциплинарный характер. Нелинейная динамика изучает поведение нелинейных математических моделей (являющихся математическим описанием реальных процессов с физике, химии, биологии, экономике и других дисциплинах) во времени и пространстве в зависимости от начальных состояний и внешних воздействий, задаваемых параметрически. Понять динамику конкретной модели означает выяснить все возможные виды ее поведения при произвольных начальных данных и изменении параметров, т.е. необходимо исследовать не частное решение при конкретных заданных условиях, а поведение в целом. Полное представление об исследуемой модели дает разбиение пространства ее параметров на области с качественно различным поведением модели. Очень важно отметить, что без компьютеров исследование нелинейных моделей практически невозможно.

Математические модели в нелинейной динамике могут быть детерминированными и вероятностными. Детерминированные модели, описываемые эволюционными системами уравнений, в свою очередь, могут быть точечными (эволюция происходит только во времени) и распределенными (изменения происходят во времени и пространстве), консервативными и диссипативными, дифференциальными и разностными, в

том числе и с запаздывающими аргументами. Точные определения многих терминов нелинейной динамики можно найти в разделе 5 данного пособия.

Для первоначального знакомства с нелинейным миром важно правильно выбрать класс моделей нелинейной динамики, пригодный для использования в студенческом практикуме - в смысле сложности получения и анализа решений "в целом", потребности в компьютерных ресурсах, трудностей у преподавателей с проверкой результатов, а у студентов - с тестированием алгоритмов и программ. На наш взгляд, наиболее подходит для практикума по изучению нелинейных моделей класс точечных детерминированных моделей, причем на первом этапе обучения - в форме разностных систем (итерируемых отображений) с дискретным временем, а на втором этапе - в форме систем обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ) с непрерывным временем. Оба вида систем могут иметь переменные с запаздывающими аргументами. Размерность систем - $N \leq 4$, что вполне достаточно для целей обучения.

Отбор содержательных по смыслу, интересных в познавательном плане и посильных студентам нелинейных моделей представляет весьма трудоемкую работу составителя набора индивидуальных заданий для студентов. Этот процесс подразумевает: поиск моделей в научной, учебной литературе и в Web-источниках, осмысление моделей (разные предметные области) и проверку их на компьютере в различных режимах; формулировку индивидуального задания для конкретной модели (фактически небольшого исследовательского проекта) в рамках типового задания; подготовку ряда эталонных примеров по каждому индивидуальному заданию для удобства контроля преподавателем работы студента в практикуме. Желательно, чтобы итоги такой работы были опубликованы в форме учебного или методического пособия с включением в него необходимых теоретических сведений.

Павловым Б.М. был реализован такой подход в [11] при подготовке учебного пособия по нелинейным моделям в форме систем ОДУ и используется в данном учебном пособии, ориентированном на изучение более простых, чем ОДУ, разностных систем, но с не менее разнообразным поведением решений.

Знакомство с нелинейными одномерными отображениями полезно и посильно студентам-гуманитариям и школьникам.

В данном учебном пособии в разделе 1 сформулировано типовое студенческое задание, раздел 2 посвящен теоретическим сведениям, в разделе 3 представлены более 30 одно-, двух- и трехмерных нелинейных отображений и заданий к ним. Раздел 4 включает в себя иллюстративный материал, в разделе 5 приводится словарь терминов, далее - список литературы. Основная

рекомендованная литература из приводимого списка – [3],[4] и [5]. Оригинал-макет пособия подготовлен М.Д.Новиковым, включая весь иллюстративный материал.

Задания для предложенных выше классов систем студенты факультета ВМК МГУ выполняют в практикуме с применением программирования пользовательского интерфейса, необходимых вычислительных модулей и модулей визуализации результатов расчетов. Студентам других факультетов и вузов, от которых не требуется программировать в практикуме, рекомендуется использовать для выполнения подобных заданий математические пакеты типа Derive, Mathcad, Matematica и MAPLE.

Мы стремимся достичь следующих целей в практикуме по нелинейной динамике:

- 1) обучить студентов технологии вычислительного эксперимента (реализация триады А.А.Самарского "модель-алгоритм-программа");
- 2) познакомить студентов с особенностями нелинейных моделей, необычностью их поведения, стимулируя познание нового, в частности, детерминированного хаоса, бифуркаций и аттракторов;
- 3) научить отслеживать плавную эволюцию решений при изменении одного параметра и, что более трудно, обнаруживать качественные перестройки (бифуркации) решений, которые могут происходить с решениями систем при изменении параметров в заданных диапазонах;
- 4) привить вкус к исследовательской, творческой работе, приучая выполнять аналитическую часть исследования, проектировать красивые интерфейсы и разрешая программировать на любимом языке высокого уровня;
- 5) развить "нелинейное" (синергетическое) мышление, непривычное для классической науки, на основе опыта, приобретаемого в ходе реализации индивидуального задания.

В завершение отметим, что с целью совершенствования обучения и преподавания авторами разработан и применяется в учебном процессе программный комплекс "Нелинейные динамические системы", имеющий характер учебно-исследовательской среды (микромира), автоматизированного практикума и компьютерного задачника для изучения точечных математических моделей в форме дифференциальных, разностных и дифференциально-разностных систем уравнений [13].

Раздел 1. Формулировка типового задания

Главная цель задания - приобретение студентами навыков проведения на компьютере вычислительного эксперимента (ВЭ) с заданной нелинейной математической моделью (ММ), взятой, как правило, из естественных наук и описывающей некоторое явление или процесс в дискретном времени в форме разностной системы N уравнений - системы многократно итерируемых отображений. Разнообразие типов поведения (включая хаотическое) у итерируемых нелинейных отображений проявляется уже с $N=1$, в то время как у систем обыкновенных дифференциальных уравнений только для $N \geq 3$.

Дополнительные цели задания: практика в разработке и отладке на одном из языков высокого уровня комфортного интерфейса для проведения ВЭ исследователем и алгоритмов распознавания типов поведения полученного на компьютере решения конкретной системы на основе теоретических критериев.

Цель отдельных ВЭ - определение точек бифуркаций при вариации параметров, выявление аттракторов и их областей притяжения для диссипативных отображений, нахождение регулярных и стохастических множеств точек для консервативных отображений, идентификация динамического режима в заданных условиях. Для более глубокого осмысления особенностей нелинейных моделей рекомендуется ознакомиться с теоретической частью учебного пособия [11] и разделом 2 данного пособия.

Данное типовое задание может предлагаться студентам либо как самостоятельное с использованием пакета "Нелинейные динамические системы" [13] (как правило, для непрограммирующих в вычислительном практикуме студентов), либо как первый этап для студентов факультета ВМК МГУ, выполняющих далее более сложное задание по исследованию нелинейной ММ в форме системы ОДУ [11] с непрерывным временем на основе похожего интерфейса, но с применением численного метода интегрирования систем третьего или четвертого порядка [21].

1.1. Математическая модель типового задания

В качестве математической модели предлагается система N разностных уравнений с параметрами, которую можно кратко записать в векторном виде:

$$X(n+1)=F[X(n),n;\mu], \quad X \in R^N, \mu \in R^s. \quad (1)$$

В предлагаемых студентам заданиях число N уравнений не превышает 3, поэтому рассмотрим более подробно частный случай (1) - систему трех уравнений

$$\begin{aligned}x(n+1) &= f_1[x(n), y(n), z(n), n; \mu_1, \mu_2, \dots, \mu_s] \\y(n+1) &= f_2[x(n), y(n), z(n), n; \mu_1, \mu_2, \dots, \mu_s] \\z(n+1) &= f_3[x(n), y(n), z(n), n; \mu_1, \mu_2, \dots, \mu_s]\end{aligned}\quad (2)$$

В этой системе n - дискретное "время" - номер итерации - независимая переменная ($n=0, 1, 2, \dots, n \rightarrow \infty$), $X=(x, y, z)$ - вектор зависимых переменных, μ - вектор вещественных параметров или коэффициентов системы, $F=(f_1, f_2, f_3)$ - вектор правых частей; по крайней мере одна из f_i предполагается нелинейной функцией зависимых переменных - одной или нескольких; s - число параметров. При отсутствии явной зависимости вектор-функции F от n система (2) называется автономной, в противном случае - неавтономной - по аналогии с системой ОДУ.

Параметры μ_j в отдельном ВЭ полагаются заданными числами. Один из параметров (реже - два) - варьируется в серии ВЭ в определенном интервале для поиска бифуркационных значений, т.е. точек в пространстве параметров, в которых меняется тип асимптотического поведения решения системы (2) вследствие потери устойчивости либо неподвижной точки, либо периодического или квазипериодического состояния с переходом в хаотическому (стохастическому) состоянию.

Как и для системы ОДУ, для (2) ставится задача Коши: при $n=0$ задаются начальные значения $x(0)=a$, $y(0)=b$, $z(0)=c$, от которых начинаются итерации системы и продолжаются до тех пор (как правило, финальное значение $n \approx 10^4$), пока не сформируется типичный аттрактор или своеобразное множество точек в фазовом пространстве R^3 или в его проекциях на фазовые плоскости. Тройка чисел (a, b, c) обычно выбирается из ϵ -окрестности любой простой (не кратной) неподвижной точки (н.т.) системы отображений (2), т.е. по правилу:

$$a=x^*+\epsilon, \quad b=y^*+\epsilon, \quad c=z^*+\epsilon, \quad 0<\epsilon\leq 1, \quad (3)$$

где x^* , y^* , z^* - компоненты н.т. X^* в фазовом пространстве R^3 , которые являются аналитическими или численными решениями нелинейной алгебраической или трансцендентной системы уравнений (2) при $n=0$ и $X_n=X_{n+1}=X^*$:

$$X^*=F(X^*, 0; \mu) \equiv G(\mu) \quad (4)$$

Найденные в виде формул, они будут явными функциями параметров μ_j . У конкретной системы неподвижных точек X^* может быть более одной - в зависимости от вида нелинейности в f_i (например, квадратичная, кубическая функция по x, y, z и/или от наличия элементарных функций типа экспоненты, логарифма, квадратного корня или тригонометрических функций). Желательно все неподвижные точки найти, если не оговорено другое в условиях задания. После определения числа неподвижных точек и

установления областей их существования в зависимости от варьируемого (бифуркационного) параметра полезно провести линейный анализ их устойчивости при изменении этого параметра в заданном диапазоне. Найденные неподвижные точки полезно проверить при $\epsilon=0$ для нескольких значений бифуркационного параметра, итерируя конкретную систему отображений 5 - 10 раз.

Заметим, что в исследовании динамики консервативных отображений варьируемыми в ВЭ являются начальные условия a, b, c ; обычно это оговорено для конкретных моделей.

1.2. Требования к программе. Некоторые рекомендации.

Итерации системы отображений (2) следует проводить "квантами" по K итераций с прерыванием расчета после каждого кванта с целью промежуточного визуального анализа поведения системы и принятия волевого решения о прекращении итерирования или о его продолжении (т.е. выполнить очередной квант расчетов); обычно следует брать $n_f = 10^4$ и тогда рекомендуется $K=500$ или 1000. В памяти компьютера необходимо хранить вектор-решение для всех итераций вплоть до $n=n_f$, обеспечивая возможность просмотра решений на экране монитора для любого интервала дискретного времени $[n_1, n_2]$, (допускаются, в частности, значения $n_1=0$ и $n_2=n_f$). Надо выводить следующие таблицы и графики: 1) таблицу значений каждой функции X, Y и Z (решения системы); 2) таблицу экстремумов одной из функций X, Y или Z по выбору пользователя; 3) график одной из функций X, Y или Z ; 4) график экстремумов одной из функций X, Y или Z ; 5) двумерный фазовый портрет - график в системе координат $(X, Y), (Y, Z)$ или (X, Z) .

Интерфейс для организации интерактивной работы студента с программой должен состоять из структурированных "экранов" для размещения главного и рабочего меню, а также для размещения графической, текстовой и табличной информации на этапах расчета и анализа. На "титальном" экране должны присутствовать данные о студенте (ф.и.о., номер группы, календарный год), а также название системы и вид отображений. Главное меню служит для задания конкретных значений параметров μ_j , начальных условий a, b, c и ϵ , а также количества K шагов итераций на каждом кванте для осуществления одного варианта ВЭ до $n=n_f$. Рабочее меню служит для выбора дальнейшего действия после каждого кванта из K итераций. Требования к рабочему меню практически такие же, как сформулированные в [11] для исследования систем ОДУ. Кратко - надо выбрать один из возможных вариантов: 1) продолжение итерации (на следующем кванте), 2) повтор итерации (на текущем кванте), 3) вывод таблицы или графика, 4) выход в

главное меню для изменения параметров или начальных условий (после чего процесс итерирования начинается сначала в новых условиях). Для разностных систем (в отличие от систем ОДУ) не надо задавать параметры численного метода (он не программируется), и термин "интегрирование" заменяется термином "итерирование".

Дадим некоторые рекомендации по построению графиков решений системы отображений.

1) Из-за ограниченной разрешающей способности экрана монитора компьютера возможно искажение графиков; при больших объемах анализируемых дискретных временных рядов (квантов $[n_1, n_2]$) точки на экране, соединенные отрезками прямой, могут превратиться в сплошную полосу. Для борьбы с этими затруднениями можно предусмотреть режим "лупы" (увеличения масштаба), т.е. большой ряд просматривать порциями. Такой метод очень полезен при изучении фракталов.

3) Надо внимательно следить за масштабом представления данных по каждой из осей координат; масштабы по разным осям обычно различны. Для правильного выбора масштабов необходимо вычислять глобальные экстремумы решений системы отображений на кванте $[n_1, n_2]$.

4) Не забывайте указывать, каким величинам соответствует масштаб по каждой из осей координат; не следует использовать экспоненциальную форму вывода (например, $0.215E+01$) как визуально неприятную. Надо использовать формат с фиксированной точкой (выводить "2.15").

5) Надо допустить два режима построения графиков: а) соединять б) не соединять соседние точки отрезком прямой линии; графический анализ динамики поведения разностной системы иногда удобнее проводить, если точки соединены (обычно при выводе графиков), иногда - если не соединены (обычно при выводе фазовых портретов).

6) Наличие сетки координатных линий на графиках не обязательно; скорее она даже мешает созданию целостного образа о динамике изучаемой разностной системы.

1.3. Как идентифицировать динамическое поведение модели

Возможны следующие типы асимптотического поведения ограниченного (монотонного или колеблющегося) решения системы отображений.

1) Стационарное состояние (или колебание с нулевой амплитудой), возможно, отличное от неподвижной точки, из ϵ -окрестности которой начато итерирование.

2) Периодическое решение или цикл-Р с одинаковым периодом $P > 1$ для каждой компоненты.

3) Квазипериодическое решение с двумя или тремя частотами (в фазовом пространстве такому решению соответствуют замкнутые кривые).

4) Нерегулярные апериодические колебания (их период P установить трудно или невозможно даже по очень большому числу итераций).

Первые 3 режима называются регулярными; последний режим называется динамическим хаосом для диссипативных систем и стохастическим режимом для консервативных систем.

В процессе исследования динамики конкретной системы отображений необходимо убедиться, что при заданном начальном условии и наборе параметров μ_j ограниченное решение $X(n)$ с ростом n выходит на один из четырех указанных выше режимов. Для идентификации динамического хаоса в случае одномерных отображений ($N=1$) необходимо одновременно с исходным уравнением итерировать дополнительное уравнение для вычисления показателя Ляпунова - его итоговое положительное значение после n_f итераций свидетельствует о хаотическом поведении решения (см. п. 2.5).

Одной из целей конкретного задания может быть поиск одного или нескольких бифуркационных значений некоторого параметра μ_i с наперед заданной точностью (например, до пяти знаков после запятой) - в этом случае проводится "ручная" пристрелка способом дихотомии в сочетании с визуальным анализом решения на экране, а при $N=1$ - с оценкой величины $L(\mu_i)$ - показателя Ляпунова.

Следует отметить, что при неправильно заданных начальных условиях (например, ϵ - относительно большое, неправильно найдена неподвижная точка) или при некотором значении бифуркационного параметра решение начинает неограниченно расти монотонным или колебательным образом. Такое явление соответствует обычно неустойчивому динамическому режиму и его полезно идентифицировать заранее в своей программе: если хоть одна компонента системы на любой итерации станет по абсолютной величине больше 10^6 , то необходимо на экран монитора посылать сообщение о такой ситуации, например, "компонента z при $k=258$ стала $> 10^6$ ", и прекращать итерирование. При получении такого сообщения следует обдумать, почему это произошло.

Успешной идентификации типа поведения способствует анализ графиков и таблиц максимумов и минимумов искомым функций от номера n на очередном кванте $[n_1, n_2]$ итерирования. Точное значение периода можно легко определить только по таблице экстремумов, делая выборки, например, по 100 итераций из накопленного массива (файла) решения из интервалов, близких к финальному состоянию. Если в таких интервалах невозможно

определить число P - период (он больше 100), то такая ситуация свидетельствует о предхаотическом или хаотическом (стохастическом) поведении решения.

Заметим, что в некоторых конкретных системах отображений хаотическое (стохастическое) поведение может возникнуть на ранних итерациях (например, первые 100-200 итераций), а затем превратиться в один из трех возможных регулярных типов; другой возможный случай - участки хаотичности чередуются с участками регулярного поведения (явление так называемой перемежаемости) - см. 2.9.

С целью идентификации асимптотического ($n \rightarrow \infty$) поведения математической модели преподаватель может предложить студенту факультета ВМК МГУ реализовать в своей программе один из следующих дополнительных алгоритмов обработки любого отрезка $[n_1, n_2]$ временного ряда (обычно $n_2 = n_f$).

1) Построение бифуркационной диаграммы по одному из параметров модели (см. п.2.7).

2) Построение графика последовательных экстремумов (максимумов или минимумов) для любой функции $Y_i(n)$ на отрезке $[n_1, n_2]$ с целью приближенного представления функциональной зависимости $Y_{i,j+1} \approx F(Y_{i,j})$ ($Y_{i,j}$ - j -й экстремум функции Y_i); для этого по рассчитанной таблице экстремумов на плоскость (Y_i, Y_i) наносятся точки $(Y_{i,1}, Y_{i,2}), (Y_{i,2}, Y_{i,3}), \dots$ и т.д. Немонотонность графика F обычно свидетельствует о хаотическом поведении временного ряда.

3) Графическое изображение на плоскости границ и областей изменения а) начальных данных при фиксированных значениях параметров или б) двух параметров, при которых решение системы разностных уравнений остается ограниченным при $n \rightarrow \infty$.

Идентификации динамического поведения способствует режим соединения последовательных точек в фазовой плоскости для двумерных отображений и в плоских проекциях фазовой траектории для трехмерных отображений. На некоторой стадии итерационного процесса могут наблюдаться следующие картинки: 1) замкнутые P -угольники - это означает, что имеется цикл с периодом P ; 2) "стопка" P -угольников с немного смещенными границами - означает, что либо это еще не финальная стадия для цикла с периодом P , либо предхаотический режим; необходима проверка другими дополнительными способами; 3) одно или несколько колец - свидетельствует о квазипериодичности; 4) густо и скачкообразно "заметаемая" область - указывает на хаотичность.

Раздел 2. Краткие теоретические сведения о нелинейных разностных системах (итерируемых отображениях)

2.1. Модели детерминированных систем

В нелинейной динамике детерминированных систем наиболее часто рассматриваются два вида математических моделей: обыкновенные дифференциальные уравнения (или потоки - flows) и разностные уравнения, иначе называемые итерируемыми отображениями (maps). Математические модели в форме систем обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ) для целей обучения студентов университетов рассмотрены в работе [11] и включены в компьютерный задачник [13]. Определенную качественную и количественную информацию об изучаемом объекте можно получить посредством анализа его эволюции в дискретные моменты времени, рассматривая сечения Пуанкаре (см.2.3). Сечения (отображения) Пуанкаре помогают отличить друг от друга качественно различные типы поведения модели в непрерывном времени - стационарные, периодические, квазипериодические и хаотические (стохастические). Отображения Пуанкаре имеют специфический вид, похожий, как далее увидим, на итерационный процесс для разностной системы нелинейных уравнений. Разностные системы, как и системы ОДУ, по динамическим свойствам подразделяются на консервативные и диссипативные. Приведем их основные общие характеристики.

Консервативные системы - это динамические системы без диссипации (потерь энергии), энергия в них постоянна - сохраняется во времени; часто их называют гамильтоновыми системами. Если в определенных условиях возникает стохастическое (как бы случайное) поведение консервативной системы, то фазовые траектории (орбиты) решения стремятся однородно заполнить все части некоторого подпространства в фазовом пространстве системы. Критерием консервативности разностной системы вида $X_{n+1}=F(X_n), n, \mu$ (см. 1.1) является равенство единице ее Якобиана.

Диссипативные системы - это динамические системы с потерями энергии, которая в них убывает по различным причинам (например, трение). Для разностных диссипативных систем Якобиан всегда меньше 1, а хаотические траектории, если возникают в определенных условиях, своеобразно заполняют некоторое подпространство фазового пространства: в нем остаются пустоты (для иллюстрации см. пример 4 из п.2.5). Мера степени заполнения траекториями определенного подпространства называется фрактальной размерностью. У диссипативных систем существуют притягивающие множества в фазовом пространстве - аттракторы, простые и

странные. Для последних нецелая, фрактальная размерность является как бы визитной карточкой. Графические образы многих странных аттракторов, возникающих при итерации различных отображений, приведены в разделе 4.

Далее в п.п. 2.2 - 2.10 приведены некоторые теоретические сведения о нелинейных отображениях, необходимые при выполнении заданий практикума.

2.2. Точечные отображения. Основные понятия.

Отображением называется набор правил $X \rightarrow X'$, ставящих каждому объекту x некоторого класса C в соответствие некоторый объект x' класса C' . Пусть классы C и C' являются множествами элементов. Тогда отображение записывается в виде $f: C \rightarrow C'$. Если $x \in C$, то элемент x' из C' , сопоставляемый при отображении f элементу x , обозначается через $f(x)$ и называется образом элемента x (сам x - прообраз элемента x'). Говорят, что x' есть функция f от аргумента x . Область определения функции f - класс C , область значений - класс C' , или, в общем случае, некоторый подкласс класса C' . Некоторое отображение называется отображением класса C на класс C' или в класс C' , если множеством значений отображения является весь класс C' . Классы C и C' могут быть различными, но могут и совпадать. Отображение класса C на класс C' называется взаимно однозначным, если существует обратное отображение $x' \rightarrow x$, обычно обозначаемое $x = f^{-1}(x')$. Сами объекты x и x' могут быть множествами некоторых объектов $x_1, x_2, \dots$ ($x'_1, x'_2, \dots$). Таким образом, могут быть определены вектор-функции $f: \bar{x} = f(x_1, x_2, \dots)$ двух и более аргументов.

Конечные и бесконечные последовательности можно толковать как отображения (функции). Например, конечная последовательность из n элементов $a_1, a_2, \dots, a_n$ есть отображение $f: \{1, 2, \dots, n\} \rightarrow \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ - такое, что $f(i) = a_i, i = 1 \dots n$.

При исследовании динамических моделей рассматривают функции, зависящие от времени t . Например, в физическом эксперименте измеряют некоторый сигнал - непрерывную функцию $x(t)$. Ее значения в последовательные моменты t_j называют дискретным временным рядом, записывая как $x_j = x(t_j), j = 1, 2, \dots$. Если измерения сигнала производят через равные промежутки времени Δt , то получают временной ряд $x_1, x_2, \dots, x_j, \dots$, где номер элемента есть дискретное время. Иногда можно установить явную функциональную связь последующего элемента ряда с предшествующим элементом, что записывают в виде отображения

$$x_{n+1} = f(x_n), n = 1, 2, \dots, \quad (1)$$

задающего итерационный процесс при заданной функции f . Запись (1) похожа на разностное уравнение для величины x , определенной на равномерной

сетке по времени с шагом Δt (пример - метод Эйлера приближенного решения дифференциального уравнения $\dot{x}=g(x)$: $x_{n+1}=x_n+\Delta t \cdot g(x_n) \equiv f(x_n)$). Записи вида (1) называются итерировемыми отображениями или разностными уравнениями.

В случае многих переменных "x" рассматривается как вектор с N компонентами $x=(x^{(1)}, x^{(2)}, \dots, x^{(N)})$, и тогда (1) представляет систему из N уравнений, где $f=(f_1, f_2, \dots, f_N)$ - известная вектор-функция от x; N называется размерностью отображения.

К уравнениям вида (1) относятся отображения Пуанкаре, используемые при математическом исследовании нелинейных моделей в форме систем ОДУ с непрерывным временем (см. 2.3). Ввиду важности отображений вида (1) для нелинейной динамики мы далее приводим теоретические сведения именно для таких отображений (скалярных и векторных) в предположении, что f - нелинейная функция x, зависящая, возможно, от одного или нескольких параметров. Нелинейность отображения очень важна, ибо она приводит к существованию различных режимов поведения (типов динамики) в дискретном времени при $n \rightarrow \infty$, зависящих от начальных условий при $n=0$ и значений параметров.

Приведем два нелинейных отображения, являющихся парадигмами нелинейной динамики.

1) Одномерное логистическое отображение с одним параметром - аналог логистического уравнения Ферхюльста-Кетле (1835 г.)

$$x_{n+1}=a \cdot x_n \cdot (1-x_n).$$

2) Двумерное отображение с двумя параметрами a, b - система Энона (1976 г.)

$$x_{n+1}=1+y_n-a \cdot x_n^2, \quad y_{n+1}=b \cdot x_n.$$

Эти отображения с квадратичной нелинейностью замечательны тем, что на асимптотической стадии (при очень больших n) обладают характерной динамикой - регулярной или хаотической (стохастической).

Математические методы исследования систем нелинейных отображений с параметрами во многом подобны методам исследования нелинейных систем ОДУ, описанным в [11]. Например, можно найти неподвижные точки отображения, определить их число в зависимости от значений параметров и устойчивость каждой неподвижной точки. Спецификой систем нелинейных отображений по сравнению с системами нелинейных ОДУ является то, что отображения уже при размерности $N=1$ (и выше) могут порождать динамический хаос (ОДУ - только при $N \geq 3$).

Замечание. Отображения вида (1) часто используются как генераторы псевдослучайных чисел. В работе [30] описан один из генераторов целых псевдослучайных чисел. Используется функция $f(x)=(a \cdot x+c) \bmod m$, где a, x, c и

m - целые числа, а выражение $(\alpha \bmod m)$ означает остаток от деления числа α на число m . Приведены рекомендации по выбору x_0, a, c и m : m следует брать равным 2^k , где k - количество двоичных разрядов целого числа; x_0 может быть произвольным, например, 1; " a " выбирается из условий $a(\bmod 8) = 5$ и $m/100 < a < m - \sqrt{m}$; " c " - нечетное число такое, что $c/m \approx 0.21132$.

По-видимому, многие из моделей раздела 3 для хаотических (стохастических) режимов могут тоже претендовать на роль датчиков псевдослучайных чисел.

2.3. Метод сечений и отображений Пуанкаре.

Напомним (см.[11]), что эволюция нелинейных моделей в непрерывном времени может быть описана системой N обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{d}{dt}X(t) = X'(t) = F(X, t), \quad X \in R^N, \quad X = (x_1, x_2, \dots, x_N), \quad (2)$$

где R^N - фазовое пространство размерности N , а $F = (f_1, f_2, \dots, f_N)$ - вектор-функция. Заметим, что к виду (2) с помощью подходящей замены переменных всегда можно преобразовать одно дифференциальное уравнение N -го порядка. Систему уравнений (2) иногда называют потоком в R^N . Если F явно от времени не зависит, то поток и система называются автономными, в противном случае - неавтономными.

В случае когда правые части F_i ($i=1, 2, \dots, N$) системы (2) суть нелинейные функции, найти аналитическое выражение для общего решения системы удастся крайне редко, т.к. потоки неинтегрируемы в подавляющем большинстве случаев. Поэтому приходится исследовать каждое частное решение, рассматривая соответствующую ему траекторию в фазовом пространстве R^N . Без современных компьютеров и методологии вычислительного эксперимента исследование нелинейных систем (2) выполнить практически невозможно.

Оказывается, можно упростить исходную задачу, если использовать метод, предложенный в начале XX века А.Пуанкаре: метод позволяет в ряде случаев перейти от исследования системы ОДУ в R^N с непрерывным временем к исследованию системы отображений в R^{N-1} с дискретным временем. Метод основан на использовании секций поверхностей, проведенных определенным образом в фазовом пространстве системы (2). На практике использование метода Пуанкаре ограничено трехмерными фазовыми пространствами ($N \leq 3$).

Для иллюстрации метода Пуанкаре рассмотрим диссипативный поток в трехмерном пространстве с координатами Y_1, Y_2, Y_3 , интересуясь

асимптотическим поведением некоторого ограниченного решения (2) при $t \rightarrow \infty$ на этапе появления аттрактора. В качестве секущей поверхности S возьмем плоскость $Y_3 = h = \text{const}$, выбрав высоту h так, чтобы фазовая траектория Γ пересекала S трансверсально (не под нулевым углом).

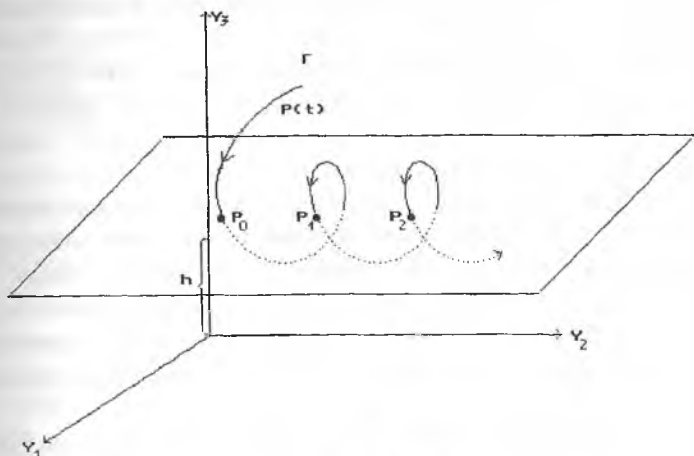


Рис.1

На рис. 1 схематически изображен процесс получения последовательности точек $P_0, P_1, \dots, P_k, \dots$, через которые траектория Γ проходит в одном и том же направлении: точка P_0 - точка начального "протыкания" плоскости S траекторией Γ при движении фазовой точки $P(t)$ сверху вниз (например, для заданного направления эволюции $(y_3' < 0)$, P_1 - точка первого (в момент t_1) протыкания, P_2 - точка второго (в момент t_2) протыкания и т.д. Процедура получения точек P_k такова, что с ростом времени компонента решения $y_3(t)$ непрерывно переходит с одной стороны плоскости S на другую. В результате получим множество точек $\{P_k\}$, которые и образуют на S сечение Пуанкаре. Если траектория Γ - замкнутая кривая в R^3 , то множество точек $\{P_k\}$ будет оставаться конечным при $t \rightarrow \infty$, в случае незамкнутой кривой Γ множество $\{P_k\}$ будет счетным множеством (например, траектория потока с хаотическим поведением никогда не замыкается, см. [11]). Решение системы (2) единственно (это всегда предполагается), поэтому точка P_0 однозначно определяет точку P_1 , которая в свою очередь определяет точку P_2 и т.д. Таким образом, приходим к определению: *преобразование $T: P \rightarrow T(P)$, которое переводит любую предыдущую точку P_k в следующую P_{k+1} и является непрерывным отображением плоскости S на себя, называется отображением Пуанкаре*:

$$P_{k+1} = T(P_k) = T(T(P_{k-1})) = T^2(P_{k-1}) = \dots = T^k(P_0).$$

Отметим, что запись точечного отображения Пуанкаре полностью совпадает с видом точечного отображения (1).

Итак, мы показали, что сечение Пуанкаре заменяет эволюцию потока (2) с непрерывным временем отображением T в моменты $t_1, t_2, \dots, t_k, \dots$, т.е. с дискретным временем. В общем случае интервал времени между любыми соседними точками P_k непостоянен. Множество $\{P_k\}$ является образом фазовой траектории Γ . Если соединить последовательные точки P_k и P_{k+1} отрезками, то получим геометрическое представление сечения Пуанкаре множества $\{P_k\}$ в виде некоторого графа Γ' на плоскости S . Граф Γ' можно назвать траекторией в фазовом пространстве R^2 .

Отображение Пуанкаре обладает теми же свойствами, что и породивший его поток. Например, для консервативного (гамильтонова) потока объемы в фазовом пространстве с течением времени сохраняются, тогда и соответствующее отображение T будет сохранять элементарные площади на S . Если у диссипативного потока на асимптотической стадии ($t \rightarrow \infty$) существует аттрактор, то его структурные особенности могут быть выявлены в сечении Пуанкаре.

Метод сечений Пуанкаре упрощает исследование потоков (2) по трем причинам:

1. В общем случае поток в R^n сводится к отображению R^{n-1} на себя (понижение размерности на единицу).

2. Время дискретизируется и вместо дифференциальных уравнений исследуются разностные (нелинейные алгебраические) уравнения, определяющие отображение $P \rightarrow T(P)$.

3. Значительно сокращается объем обрабатываемых данных, так как почти всеми точками на непрерывной траектории Γ можно пренебречь.

Из этих упрощений следуют преимущества математического и численного моделирования: итерации системы $x_{k+1} = T(x_k)$ осуществляются в фазовом пространстве R^{n-1} , отпадает необходимость в использовании того или иного численного метода интегрирования, имеющего определенную погрешность, нет зависимости решений от шага сетки. Тем самым снижаются требования к производительности компьютера, уменьшается общий объем вычислительной работы. Кроме того, траектории в R^3 можно изобразить на листе бумаги (экране монитора) только в перспективе или в проекциях на координатные плоскости, поэтому трудно получить представление о реальном их расположении и структуре сложных аттракторов (с как бы запутанными с кажущимися самопересечениями траекториями) в трехмерном пространстве (если только не заставить их вращаться в R^3). В то же время сечение Пуанкаре для траекторий ОДУ в R^3 - множество точек, более или менее сложным

образом расположенных в R^2 , может быстро дать удовлетворительный ответ о характере поведения потока и типе аттрактора в R^3 .

Структуры множества точек в сечении Пуанкаре и их соответствие возможным типам поведения асимптотического ($t \rightarrow \infty$) решения для потока (2) характеризуются следующей таблицей [4]:

Что наблюдается в сечении Пуанкаре.	Типы колебаний в непрерывном времени.	Тип аттрактора в R^3 .
1) Конечный набор точек (это устойчивые простые или P -кратные неподвижные точки (P -циклы).)	а) При $P=1$ - периодические колебания. б) При $P \geq 2$ - комбинационные колебания с двумя и более <u>соизмеримыми частотами</u>).	а) При $P=1$ - предельный цикл, замкнутая однооборотная орбита. б) При $P \geq 2$ - замкнутая многооборотная орбита.
2) <u>Замкнутая</u> кривая.	Квазипериодические колебания с двумя <u>несоизмеримыми частотами</u> (отношение частот - <u>иррациональное число</u>).	Однооборотный тор T^2 , поверхность которого всюду плотно покрывается фазовой траекторией, которая нигде не замыкается.
3) <u>Незамкнутая кривая</u> или несколько криволинейных дуг.	Колебания, внешне похожие на хаотические.	Ситуация сложная; возможен странный аттрактор.
4) Конечное число <u>замкнутых</u> кривых.	Квазипериодические колебания с m ($m > 2$) <u>несоизмеримыми частотами</u> .	Многооборотный тор T^2 или проекция в R^3 тора T^2 , $r \geq 3$.
5) Множество точек с необычной структурой (фрактал).	Хаотические колебания для диссипативных систем.	Странный аттрактор (фазовая траектория нигде не замыкается).
6) Бесформенный набор точек ("пыль" или "облака" точек).	а) Стохастические колебания для консервативных систем. б) Хаотические колебания для потоков со слабой диссипацией. в) Квазипериодические колебания с тремя и более <u>несоизмеримыми доминирующими частотами</u> .	а) Стохастическое множество (нет аттрактора). б) Странный аттрактор в R^3 . в) Тор $T^r, r \geq 3$.

Используемые в таблице термины (тор, фрактал и др.) поясняются в разделе 5 (словарь терминов).

На практике в экспериментах с физическими моделями динамических процессов множество точек в сечении Пуанкаре получают с помощью специальной аппаратуры и методов (см. [4] и [5]). Это множество точек можно построить и в результате вычислительных экспериментов с математической

моделью в форме системы ОДУ, решив численно эту нелинейную систему. Но, зная численное решение, мы практически все можем узнать об особенностях динамики модели (см. [11]); полученные выводы может лишь подтвердить построенное множество в сечении Пуанкаре. Однако, физический и численный эксперименты не позволяют установить точный вид функции $f(x)$ в отображениях вида $x_{n+1}=f(x_n)$, особенно для многомерного вектора x .

Возможна постановка обратной задачи. В отображении Пуанкаре задан конкретный вид нелинейной функции $f(x)$ и требуется определить: какое множество точек возникает при $n \rightarrow \infty$ и как его можно соотнести с поведением решений некоторой системы ОДУ (гипотетического потока). Такая постановка требует теоретического исследования отображений вида $x_{n+1}=f(x_n)$, тем более, что к ним приводят и другие модели реальных процессов с дискретным изменением времени (например, в биологии и экономике).

2.4. Отображения: неподвижные точки, устойчивость, бифуркации

Здесь, следуя, в основном, [25], мы приводим необходимые определения и результаты теории (без доказательств), касающиеся N -мерных точечных отображений с параметрами:

$$X_{n+1}=F(X_n, A) \text{ или кратко, } \bar{X}=F(X, A), n=0, 1, 2, \dots, \quad (3)$$

где $X=(x^{(1)}, x^{(2)}, \dots, x^{(N)})$, $F=(f_1, f_2, \dots, f_N)$, $A=(a_1, a_2, \dots, a_s)$. Будем предполагать, что по крайней мере одна из функций f_i является нелинейной функцией хотя бы одного аргумента $x^{(j)}$.

Решение разностной системы (3) легко определяется по рекуррентным формулам (3) на каждом n -м шаге итерации ($n \rightarrow \infty$), если заданы начальные значения - вектор $X^0=X|_{n=0}$ и набор значений параметров A .

Числовая последовательность значений компонент векторов $\{X_n\}$ - это по сути дискретный временной ряд, при $N \geq 2$ - многомерный. Точки последовательности $\{X_n\}$ при $n \rightarrow \infty$ будут постепенно заполнять фазовое пространство размерности N ; если последовательные фазовые точки в R^N соединить отрезком прямой, то полученная ломаная линия и будет фазовой траекторией отображения F на плоскости ($N=2$) или в трехмерном пространстве ($N=3$).

Вид нелинейных функций f_i и наборы фиксированных значений параметров a_j существенно влияют на решения $\{X\}$ системы (3); с ростом n они либо быстро растут (стремятся к $+\infty$ или $-\infty$), либо на больших промежутках времени остаются ограниченными, совершая регулярные (циклические) колебания или нерегулярные (как бы случайные) колебания.

Обычно исследователи интересуются асимптотикой итерационного процесса (3) - поведением решений при очень больших n ($n \sim 10^4, 10^5$), когда переходные состояния наверняка завершились и можно ожидать появления устойчивой структуры в R^N , например, аттрактора.

Отметим имеющиеся аналогии в теоретическом исследовании ОДУ и отображений: это проблема существования неподвижных точек отображений, которые соответствуют состояниям равновесия (особым точкам) систем ОДУ; однако важен вопрос об устойчивости неподвижных (особых) точек и периодических траекторий - циклов; определение бифуркаций неподвижных (особых) точек и циклов при изменении параметров как у непрерывной, так и у дискретной модели. Аналог интегральных кривых ОДУ - кривые $x^{(j)}(n)$ отображения (3).

Напомним 2 важных определения применительно к системе (3); здесь считаем, что все параметры a_j - постоянны.

Определение 1. Неподвижной точкой (простой) отображения (3) называется любая точка $X \in R^N$, являющаяся корнем векторного уравнения

$$G(X) = F(X, A) - X = 0 \quad (4)$$

Из-за нелинейности функций f_i неподвижных точек может быть несколько, они могут и отсутствовать при определенных значениях параметров. Если рассматривать задачу (3) с изменяющимися параметрами, то необходимо определить в пространстве параметров R^s области, для которых в фазовом пространстве R^N существуют неподвижные точки.

Пример 1. Логистическое отображение $x_{n+1} = a * x_n * (1 - x_n)$ при $0 < a \leq 4$ имеет, как легко видеть, 2 неподвижные точки: $x_1^* = 0$, $x_2^* = (a-1)/a$.

Пример 2. Отображение Энона (также в силу квадратичной нелинейности) имеет 2 неподвижные точки: $x_{1,2}^* = (b-1 \pm \sqrt{(b-1)^2 + 4*a}) / (2*a)$, $y_{1,2}^* = b * x_{1,2}^*$. Эти неподвижные точки существуют только при $a > (1-b)^2/4$. Пространство параметров представляет собой плоскость (a, b) , на которой область существования неподвижных точек является криволинейная область $\{a > (1-b)^2/4, 0 < b \leq 1\}$.

Известны два общих критерия существования неподвижной точки.

1) Теорема Брауэра о достаточных условиях существования неподвижной точки (G - конечная область в R^N).

Любое непрерывное отображение f , преобразующее многомерный шар $x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_N^2 \leq 1$ или любую гомеоморфную шару область в себя, имеет в G неподвижную точку X^* (гомеоморфное отображение - это взаимно однозначное и взаимно непрерывное отображение).

2) Принцип сжимающих отображений С. Банаха. Напомним, что точечное отображение f называется сжимающим, если оно уменьшает

расстояние между любой парой точек, т.е. если для произвольной пары точек M, N и их образов M', N' выполняется неравенство

$$r(M', N') < q r(M, N). \quad (5)$$

Пусть G - конечная область многомерного фазового пространства. Основное утверждение принципа Банаха состоит в следующем: если сжимающее отображение F преобразует G в себя, то в G имеется единственная неподвижная точка X^* , причем вся область G при неограниченном повторении отображения F стягивается к ней. Из этого утверждения следует, что последовательные отображения $F(X), F(F(X))=F^2(X), \dots$ для любого x из G сходятся к X^* .

В случае, когда условие сжимаемости (5) можно усилить так, что для любых $X, Y \in G$

$$r(X', Y') < q r(X, Y), \quad q < 1,$$

то сходимость последовательности точек к X^* будет не медленнее, чем геометрической прогрессии со знаменателем q .

Принцип Банаха тоже дает лишь достаточные условия существования н.т., но утверждает, что это - единственная и глобально устойчивая неподвижная точка. В тех случаях, когда его удастся применить, принцип может обеспечить значительные, подчас исчерпывающие сведения о поведении изучаемой системы.

Определение 2. Р-циклом отображения (3) называется любая точка $X \in R^N$, удовлетворяющая векторному уравнению:

$$G(X) \equiv F^p(X) - X = 0, \quad (6)$$

где F^p означает результат применения p раз отображения F к аргументу X , т.е. $F^p(X) \equiv F(F(\dots(F(X))\dots))$.

Употребляются также синонимы понятия "Р-цикл": цикл Р-кратных неподвижных точек, периодическая траектория с периодом P . На языке числовой последовательности $\{x_n\}$ Р-цикл составляет множество из P ее неповторяющихся членов со свойством $x_{n+p} = x_n$ для любого $n > 0$, т.е. $f(x_1) = x_2, f(x_2) = x_3, \dots, f(x_p) = x_1$.

Пример 3. Последовательность $\dots 3, 1, 2, 3, 1, 2, 3, 1, 2, \dots$ - периодическая с периодом 3; 3-циклы образуют множества $\{3, 1, 2\}$, $\{1, 2, 3\}$ и $\{2, 3, 1\}$.

Приведем несколько фактов о Р-циклах.

1) Логистическое отображение (одномерное) и отображение Энона (двумерное) при различных значениях параметров могут иметь многократные циклы с периодами 2, 4, 8, 16 и т.д. (см. п. 2.7).

2) Если с ростом p решение системы (3) выходит на установившийся режим Р-цикла, то в фазовом пространстве R^N при больших p будет только Р-точка.

3) Если при плавном изменении (например, увеличении) некоторого параметра a , период возникших Р-циклов возрастает (см. п. 2.7), то при дальнейшем увеличении параметра при больших p в R^N возникают либо гладкие замкнутые кривые (одна или несколько), либо своеобразные, даже экзотические множества точек с так называемой фрактальной структурой (см. словарь).

Определение 3. Производной Шварца одномерного отображения (3) называется функция

$$S[f(x)] = f'''(x) / (f'(x)) - 1.5 * (f''(x) / (f'(x)))^2. \quad (7)$$

Для одномерных отображений имеется простой критерий для определения, есть у них циклы или нет [8].

Теорема. Если для некоторой трижды непрерывно дифференцируемой функции $f(x)$, задающей отображение $x_{n+1} = f(x_n)$ производная Шварца отрицательна, то отображение имеет не более одного устойчивого Р-цикла. Если такой цикл существует, то к нему притягиваются почти все траектории отображения.

Замечание. Значение P данная теорема не определяет.

Пример 4. Для логистического отображения имеем: $f''' = 0, f'' = -2*a, f' = a*(1-2*x)$. Отсюда $S[f] = -1.5*4*/(1-2*x)^2 < 0$ для $x \in [0, 1], x \neq 0.5$, поэтому могут существовать устойчивые Р-циклы с некоторым периодом P .

Удобным инструментом поиска Р-циклов служит диаграмма Ламерея (см. 2.6) и бифуркационная диаграмма (см. 2.7).

Следующая задача, возникающая после нахождения неподвижных точек (простых и кратных) - установление их локальной устойчивости или неустойчивости. Алгоритм такой же, как для особых точек систем ОДУ. Напомним его этапы.

1) Линеаризация нелинейной разностной системы около исследуемой неподвижной точки x^* .

2) Составление характеристического уравнения

$$\det(J - \lambda E) = 0, \quad (8)$$

где J - матрица Якоби, $J = \left[\frac{\partial f_i}{\partial x_j} \right]$ для определения собственных значений λ

матрицы. Общее число корней (с учетом кратности) равно N , где N - размерность системы.

Пусть уравнение (8) имеет p корней (в общем случае комплексных) внутри единичного круга $|\lambda| \leq 1$ на комплексной плоскости и q корней вне единичного круга и не имеет корней на границе единичного круга (последний случай сложен и здесь не рассматривается). Найденную неподвижную точку обозначим $O^{p,q}$.

3) Определение устойчивости неподвижной точки x^* по найденным числам p и q : точка $O^{N,0}$ - устойчивая, точка $O^{0,N}$ - неустойчивая, а точки $O^{N-1,1}, \dots, O^{1,N-1}$ - седловые неподвижные точки.

Поведение фазовых траекторий в малой окрестности простой неподвижной точки x^* совершенно такое же, как и в соответствующих случаях простых особых точек систем дифференциальных уравнений [25].

Определение 4. Устойчивые неподвижные точки и Р-циклы называются аттракторами, неустойчивые - репеллерами.

Для одномерных отображений существуют аналитические критерии устойчивости простой неподвижной точки и Р-цикла.

Теорема Кенигса. Если модуль производной функции $f(x)$, задающей отображение $x_{n+1}=f(x_n)$, меньше 1 в точке x^ , то простая н.т. устойчива, если больше 1, то н.т. неустойчива. Если существует Р-цикл и $|f'(x_1)*f'(x_2)*\dots*f'(x_p)| < 1$, то Р-цикл устойчив, если $|f'(x_1)*f'(x_2)*\dots*f'(x_p)| > 1$, то неустойчив (сравните с условиями теоремы о существовании Р-циклов). Случай равенства единице произведения производных соответствует так называемой нейтральной устойчивости.*

Пример 5. Рассмотрим двумерное отображение:

$$x_{n+1}=2*x_n+\{y_n\}, y_{n+1}=x+\{y_n\}.$$

Здесь и далее $\{ \alpha \}$ означает взятие дробной части от числа α . Якобиан

$$J = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1, \text{ следовательно, система консервативна. Точка } (0,0) -$$

неподвижная, неустойчивая, так как характеристическое уравнение $\det[J-\lambda E] = \lambda^2 - 3\lambda + 1 = 0$ имеет два действительных положительных корня: один корень меньше 1, другой - больше 1 (произведение корней равно 1). При каждой итерации происходит сжатие в одном направлении и такое же растяжение в другом направлении (см. рис.2 в п.2.6).

В трехмерном случае ($N=3$) характеристическое уравнение (8) имеет 3 корня. Возможны следующие основные случаи.

1. Корни - действительные отрицательные (положительные) числа. Особая точка - устойчивый (неустойчивый) узел.

2. Один корень - действительный, два других - комплексно-сопряженные, причем все корни имеют отрицательные (положительные) действительные части. Особая точка - устойчивый (неустойчивый) фокус.

3. Один из корней - действительный, два других - комплексно-сопряженные, причем знаки действительного корня и действительной части комплексных корней - разные. Особая точка называется седло-фокусом.

4. Все корни - действительные и разных знаков: случай соответствует двум типам неподвижной точки, называемой седло-узлом.

Последняя в данном контексте теоретическая проблема - исследование бифуркаций неподвижных точек (простых и кратных) при изменении значений параметров A отображения (3). Это очень сложная задача, редко решаемая без компьютера. Бифуркации происходят тогда, когда некоторый параметр a , плавно меняясь, проходит через некоторое значение $a_{\text{критич.}}$, после чего происходит резкая качественная перестройка: например, рождается новая неподвижная точка, устойчивая и неустойчивая неподвижные точки сливаются, простая н.т. превращается в цикл-2 или цикл- 2^k переходит в цикл 2^{k+1} . Возможны и другие метаморфозы, связанные с потерей устойчивости неподвижных точек и P -циклов, которые могут приводить к хаотизации (стохастизации) регулярных решений. Подобные бифуркации возможны в случае, если один из корней характеристического уравнения (8) "проходит" через единичный круг на комплексной плоскости при изменении значения параметра (т.е. меняются значения p и q). Тип превращений зависит от точки на единичном круге, через которую проходит корень, (т.е. от угла φ , $\lambda = e^{i\varphi}$).

Один из путей перехода к хаосу путем "каскада бифуркаций" - бесконечной последовательности удвоения периода P колебаний рассмотрен в 2.7 на примере одномерного логистического отображения.

2.5. Показатели Ляпунова

Хаос в детерминированных системах подразумевает свойство ЧЗНУ - чувствительную зависимость от начальных условий. Это означает, что две близкие в начальный момент времени траектории в дальнейшем расходятся (удаляются) друг от друга за малое, в среднем, время.

Рассмотрим некоторую дифференциальную или разностную систему. Пусть r_0 - начальное расстояние между траекториями. Предположим, что в течение малого времени t (или n итераций) расстояние r между этими траекториями, изменяется по закону:

$$r(t) \approx r_0 * 2^{L \cdot t} \text{ или } r_n \approx r_0 * 2^{L \cdot n}, \quad (9)$$

соответственно, для системы ОДУ и для разностных уравнений (отображений).

Доказано, что, если справедливы формулы (9), то при $L > 0$ ограниченное решение системы хаотично, при $L < 0$ - регулярно. Основание "2" выбрано в соотношениях (9) из соображений удобства; можно выбрать любое основание, большее 1, так как важен лишь знак L .

У N -мерных динамических систем существует спектр $\{\lambda_j\}$, $j=1,2,...,N$ показателей Ляпунова (или характеристических показателей), который свидетельствует о том, как с течением времени меняются в фазовом пространстве длины, площади, объемы и гиперобъемы. С вычислительной

точки зрения этот спектр может быть найден по траектории в фазовом пространстве, если она определена из численного решения. Если числа λ_i расположить в убывающем порядке $\lambda_1 > \lambda_2 > \dots > \lambda_N$, то оказывается, что малые длины изменяются по закону (9), где $L = \lambda_1$, малые площади - по закону $S(t) \approx S_0 * 2^{(\lambda_1 + \lambda_2) \times t}$ (или $S_0 * 2^{(\lambda_1 + \lambda_2) \times n}$), малые объемы - по закону $V(t) \approx V_0 * 2^{(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3) \times t}$ и т.д. Для идентификации хаоса достаточно вычислить лишь наибольший показатель Ляпунова.

Рассмотрим, как для разностной системы (3) аналитически вычислить спектр показателей Ляпунова. Обозначим через J_n - произведение n матриц Якоби системы (3) для значений X , равных $X_1, X_2, \dots, X_n$. Пусть $j_1(n), j_2(n), \dots, j_N(n)$ - собственные значения J_n , расположенные в убывающем порядке. Тогда показатели Ляпунова определяются с помощью предельного перехода

$$\lambda_i = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log_2 |j_i(n)|, \quad i=1,2,\dots,N; L = \lambda_1. \quad (10)$$

Вычислить L в явном виде без компьютера удастся лишь в ограниченном числе учебных моделей. Наиболее просто это можно сделать для одномерных отображений $x_{n+1} = f(x_n)$.

Если функция $f(x)$ гладкая и дифференцируемая, то расстояние между соседними траекториями измеряется величиной $|df/dx|$. Действительно, введя два близких начальных условия x_0 и $x_0 + \varepsilon$, где ε - малое число, в соотношении (9) получим:

$$d_0 = \varepsilon, d_1 = f(x_0 + \varepsilon) - f(x_0) = \varepsilon * \frac{df(x_0)}{dx} \quad (11)$$

Можно получить следующую формулу для одномерных отображений с параметром "a" (у них показатель $L = \lambda_1$ - единственный):

$$L = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \log_2 \left| \frac{df(x, a)}{dx} \right|_{x=x_k} \quad (12)$$

Рассмотрим несколько отображений, для которых можно явно вычислить L .

1) Отображение Бернулли (при $q=2$ называемое сдвигом Бернулли) :

$$x_{n+1} = \{q * x_n\}; 0 \leq x \leq 1, q > 1 - \text{вещественное число.}$$

Здесь и далее $\{\alpha\}$ означает взятие дробной части от числа α . Это отображение является отображением отрезка $[0,1]$ на себя. Оно разрывно (точки разрыва - $1/q, 2/q, \dots, k/q$, где k - такое целое число, что $k/q < 1$, а $(k+1)/q \geq 1$) и необратимо (например, при $q=2$ у любой точки x есть 2 точки x' и x'' , связанные условием $x'' - x' = 0.5$, для которых $\{2 * x'\} = x$ и $\{2 * x''\} = x$). Кроме точек разрыва всюду имеем $|f'_x| = 2 * q$; тогда из (12) $L(q) = \log_2 q > 0$ при $q > 1$, следовательно, отображение рождает хаос.

2) Отображение "домик" (а - параметр):

$$x_{n+1} = \begin{cases} 2*a*x_n, & x_n < 0.5 \\ 2*a*(1-x_n), & x_n \geq 0.5 \end{cases}$$

Здесь $|f'| = 2*a$ и $L = \log_2(2*a)$: $L > 0$ при $2*a > 1$ (решение хаотично) и $L < 0$ при $2*a < 1$ (решение регулярно); все точки $0 < x < 1$ притягиваются к $x=0$ (проверьте на компьютере).

3) Логистическое отображение с параметром "а" (см. подробнее в п. 2.7)

$$x_{n+1} = a*x_n*(1-x_n), \quad 0 < a \leq 4, \quad 0 \leq x \leq 1.$$

При $a=4$ заменой $x=0.5*(1-\cos(2*\pi*\theta))$ это отображение сводится к сдвигу Бернулли $\theta_{n+1} = \{2*\theta_n\}$, для которого $L=1$. Поэтому $L(4)=1$ для логистического отображения, следовательно, оно рождает хаос при $a=4$.

4) Двумерное отображение "преобразование пекаря" (названо так по аналогии с действиями пекаря, который раскатывает и складывает тесто):

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= \{2*x_n\}, \\ y_{n+1} &= \begin{cases} \beta*y_n/2, & \text{если } x_n \leq 0.5 \\ \beta*(y_n+1)/2, & \text{если } x_n > 0.5 \end{cases} \end{aligned} \quad (13)$$

$$0 \leq x_n \leq 1, \quad 0 \leq y_n \leq 1, \quad 0 < \beta \leq 1.$$

Это отображение можно рассматривать как обобщение необратимого отображения Бернулли при $q=2$ путем введения второй переменной с целью различения двух прообразов точки x .

Якобиан отображения имеет вид:

$$J = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & \beta/2 \end{vmatrix} = \beta.$$

При $\beta=1$ имеем консервативный случай (отображение сохраняет площади и нет аттрактора), при $0 < \beta < 1$ имеем диссипативный случай с сокращением площади и аттрактором слоистой (фрактальной) структуры.

Легко проверить, что $J_n = \begin{vmatrix} 2^n & 0 \\ 0 & (\beta/2)^n \end{vmatrix}$, поэтому собственные значения этой матрицы, определяемые из характеристического уравнения $(2^n - j) * ((\beta/2)^n - j) = 0$ таковы: $j_1(n) = 2^n$, $j_2(n) = (\beta/2)^n$. По определению спектра показателей Ляпунова имеем: $\lambda_1 = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n} * \log_2 2^n \right) = 1$, $\lambda_2 = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n} * \log_2 (2^{-n} * \beta^n) \right) = (\log_2 \beta - 1) < 0$, так как $0 < \beta \leq 1$.

Таким образом, $\lambda_1 > \lambda_2$, $L = \lambda_1 = 1$ и отображение генерирует динамический хаос в диссипативном и консервативном случаях.

Результат отображения пекаря можно наглядно представить себе, проследивая преобразование какой-нибудь фигурки, нарисованной на единичном квадрате (см. рис.2). При $\beta=1$ квадрат (а) сжимается вдоль оси Y в 2 раза, растягивается вдоль оси X в 2 раза, разрезается пополам по вертикали,

правая половина смещается к оси Y, после чего левая половина водружается сверху (получается квадрат б).

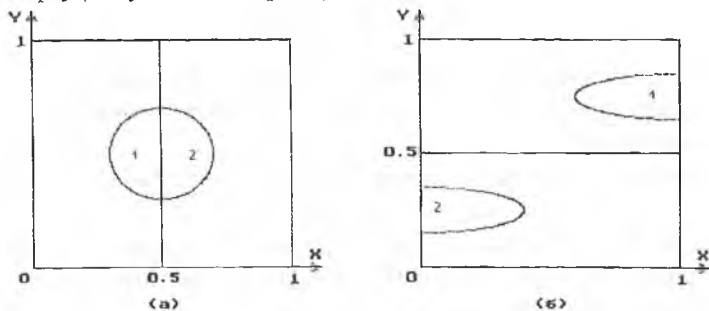


Рис. 2.

При $\beta < 1$ итерации отображения пекаря аналогичны итерациям отображения Энона (см. раздел 3).

На рис. 3 приведены множества точек в единичном квадрате для случаев $\beta=1$ (а) и $\beta=0.7$ (б) при $x(0)=y(0)=0.77777$. Видно, что в консервативном случае точки практически равномерно заполняют квадрат, а в диссипативном случае точки группируются в слоях, параллельных оси X, причем площадь, занятая точками, уменьшается, и пространство между слоями квадрата остается незаполненным. Чем меньше β , тем больше слои точек, сближаясь, сплюсциваются к оси X. Например, при $\beta=0.01$ виден 1 утолщенный слой точек вдоль оси X (проверьте на компьютере).

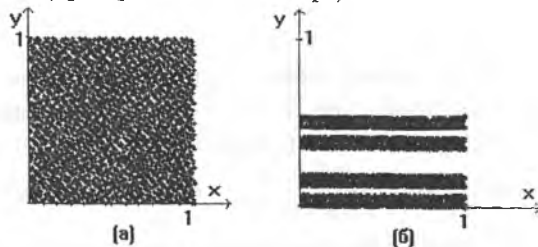


Рис. 3.

5) Отображение Энона с двумя параметрами a и b :

$$x_{n+1} = 1 - a \cdot x_n^2 + y_n, \quad y_{n+1} = b \cdot x_n, \quad (14)$$

Система (14) при $0 < b < 1$ диссипативна, при $a=1.4$, $b=0.3$ решение имеет хаотический характер, а вычисленные на ЭВМ показатели $\lambda_{1,2}$ имеют значения $L=\lambda_1=0.603$, $\lambda_2=-2.36$.

Замечание 1. В точках бифуркации при субгармоническом каскаде удвоения периода колебаний (см. 2.7) и в точках перехода "хаос $\leftrightarrow$ порядок"

максимальный показатель Ляпунова L принимает нулевое значение, ибо в области хаоса он строго положителен, а в области регулярности - отрицателен.

Замечание 2. Формулу предельного перехода (12) для одномерных отображений полезно использовать в двух ситуациях: 1) при вычислении в ходе итераций значения $L(a)$ для некоторого значения бифуркационного параметра $a=a^*$; знак $L(a^*)$ свидетельствует о типе динамики; 2) при построении графика $L(a)$ с целью анализа поведения отображения с изменением параметра "а" в заданном интервале.

2.6. Диаграмма Ламерея - Кенигса

Эта диаграмма, которую часто называют "лестницей" Ламерея, является инструментом геометрически наглядного представления свойств одномерного отображения. Поясним процесс ее получения на рис.4. Запишем кратко преобразование прямой в прямую в виде $\bar{x}=f(x)$, где $\bar{x}=x_{n+1}$, $x=x_n$, и эту зависимость изобразим на плоскости $\{x, \bar{x}\}$. Нанесем там же пунктирной прямой тождественное преобразование $\bar{x}=x$ - биссектрису I и III квадрантов плоскости.

Построение "лестницы" состоит в последовательном построении "ступенек" - ориентированной ломаной $A_1 \rightarrow B_1 \rightarrow A_2 \rightarrow B_2 \rightarrow A_3 \rightarrow \dots$, у которой точки $A_1, A_2, A_3, \dots$ представляют, соответственно, последовательные образы $f(x_0), f(x_1), f(x_2), \dots$, а точки B_i - точки пересечения горизонтальных прямых от A_i до биссектрисы $\bar{x}=x$. Таким образом, повторяя последовательность операций: 1) проведение вертикали от биссектрисы до пересечения с графиком $f(x)$, 2) проведение горизонтали из полученной точки до пересечения с биссектрисой, мы получаем изображение на графике последовательных итераций отображения. Точки пересечения графика $f(x)$ с биссектрисой определяют неподвижные точки отображения, т.е. точки, преобразующиеся в себя. На рис.4 такими точками являются M_1 и M_2 , причем M_1 неустойчива (близкие к M_1 точки удаляются от нее), а M_2 - устойчива, т.к. близкие к ней точки при $n \rightarrow \infty$ приближаются к ней.

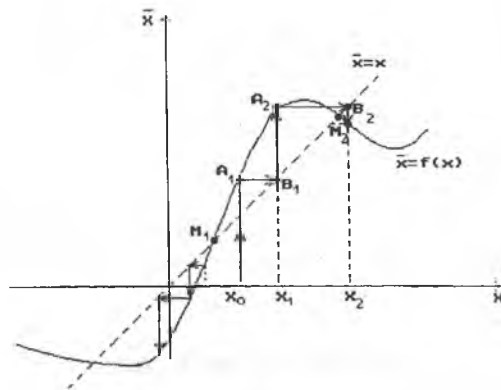


Рис.4.

Замкнутой ломаной $A_1 B_1 A_2 B_2 \dots A_{p+1} = A_1$ соответствует P -цикл кратных неподвижных точек. При $P=1$ замкнутая ломаная $A_1 B_1 A_2 = A_1$ вырождается в точку пересечения графика $f(x)$ с биссектрисой и соответствует обычной (однократной) неподвижной точке.

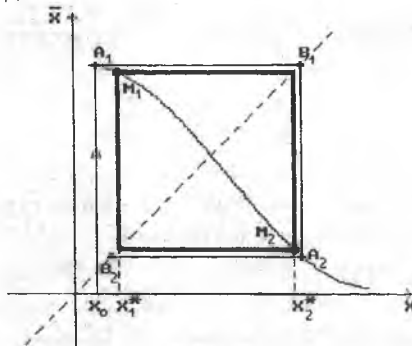


Рис.5.

На рис.5 изображена замкнутая ломаная ("жирными" отрезками) с $P=2$, причем Ц-2 для x_1^* и x_2^* устойчивый, поскольку ломаные линии, близкие к данной замкнутой ломаной, приближаются к ней в итерационном процессе.

Легко видеть, что P -кратная неподвижная точка исходного отображения f является однократной неподвижной точкой отображения f^P , т.е. после p итераций f . Обратное не всегда верно, у отображения $F = f^P$ могут быть и другие однократные неподвижные точки.

Рассмотрим случай взаимной однозначности отображения. В этом случае функция $f(x)$ монотонно меняется с монотонным изменением x , т.е. для всех x

либо $f'(x) \leq 0$, либо $f'(x) \geq 0$. Возможны следующие виды преобразования для такого случая:

- а) "прямая - прямая" при $f(\pm\infty) \rightarrow \pm\infty$,
- б) "прямая - полупрямая" при $f(+\infty)$ или $f(-\infty)$ конечном,
- в) "прямая - отрезок" при обоих $f(\pm\infty)$ конечных.

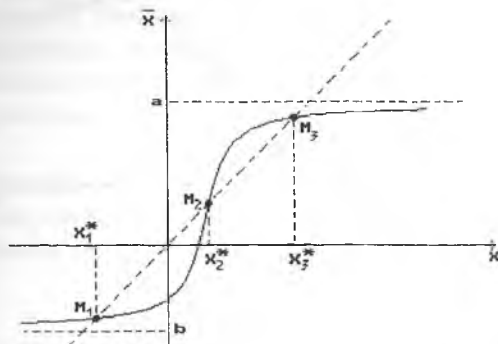


Рис.6.

На рис.6 представлен график взаимно-однозначного отображения прямой в отрезок $[a, b]$ ($f(x)$ имеет 2 горизонтальные асимптоты). Любая точка прямой преобразуется в точку, лежащую внутри отрезка $[a, b]$. Имеются неподвижные точки $M_1^*(x_1^*)$, $M_2^*(x_2^*)$ и $M_3^*(x_3^*)$, причем первая и третья устойчивы, а вторая - неустойчива. Поэтому вся прямая $(-\infty, +\infty)$ разбивается неустойчивой точкой x_2^* на 2 области притяжения: $\Pi_1(x_1^*) \equiv (-\infty, x_2^*)$, $\Pi_2(x_3^*) \equiv (x_2^*, +\infty)$.

Можно доказать, что при $f'(x) \geq 0$ вся прямая разбивается на какое-то число областей притяжения устойчивых неподвижных точек (аттракторов) и какое-то число областей отталкивания неустойчивых неподвижных точек (репеллеров), при этом аттракторы и репеллеры последовательно чередуются. Для каждой устойчивой н.т. x_i^* интервал (x_{i-1}^*, x_{i+1}^*) будет областью притяжения, где x_{i-1}^* и x_{i+1}^* - неустойчивые н.т.

Особый случай представляет ситуация, когда график $f(x)$ при $f'(x) \geq 0$ может касаться биссектрисы $\bar{x} = x$ (рис.7 - точки B_1 и B_2 на графике В). Это случай бифуркации отображения, возникшей, например, в результате непрерывного изменения некоторого параметра "а", если $f = f(x, a)$. При этом две или несколько неподвижных точек могут слиться, исчезнуть или могут появиться новые н.т. Например, для примера на рис.7 при плавной деформации (по направлению стрелки) исходного графика А при $a = a_1$ график В при $a = a_2$, происходит касание "верхней части" графика А прямой $\bar{x} = x$, в результате чего появляется новая н.т. B_3 ; при дальнейшем движении

она "распадается" на 2 н.т.; левая из них затем сливается с точкой A_3 , при этом получается точка B_2 ; неподвижные точки A_1 и A_2 также сливаются, превращаясь при касании в точку B_1 .

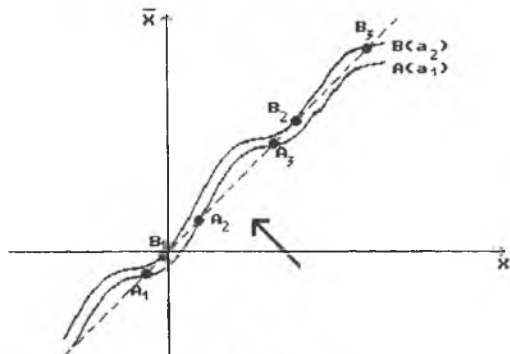


Рис.7.

Другую ситуацию имеем для взаимно-однозначного отображения с $f'(x) \leq 0$: график $f(x)$ пересекается с биссектрисой всегда в единственной точке x^* , которая может быть устойчивой или неустойчивой. Заметим, что f^2 -отображение $\bar{x} = f^2(x) = F(x)$ уже не является отображением рассмотренного типа, ибо

$$F'(x) = \left. \frac{df}{dx} \right|_{f(x)} * \left. \frac{df}{dx} \right|_x \geq 0.$$

Поэтому неподвижной точке $x^{**} = x$ отображения $F = f^2$ соответствует цикл двукратных неподвижных точек x_1^* и x_2^* отображения f таких, что $x_2^* = f(x_1^*) \neq x_1^*$.

Итак, в случае $f'(x) \leq 0$ прямая разбивается на некоторое число областей притяжения двукратных н.т. и одну область притяжения однократной н.т. (если н.т. устойчивы).

Если отображение "прямая - прямая" лишь однозначно (не взаимно однозначно), то имеем более сложный случай. Все сказанное выше о неподвижных точках остается в силе на интервале монотонности $f(x)$. Новое состоит в возможности возникновения очень сложных структур в общем случае из-за многозначности обратного отображения $f^{-1}(x)$. Этот случай мы подробно рассмотрим на примере логистического отображения, которое имеет бесчисленное множество всевозможных кратных неподвижных точек и, кроме того, в определенных условиях имеет хаотическую динамику.

2.7. Логистическое отображение. Последовательность неустойчивостей, ведущая к хаосу. Закон М.Фейгенбаума. Бифуркационная диаграмма.

Классическим примером динамической модели, обнаруживающей богатство различных режимов, в том числе и хаотическое поведение, является одномерное логистическое отображение Ферхюльста - Кетле. Иногда это отображение называют отображением Фейгенбаума. Оно содержательно описывает различные динамические процессы и, в частности, рост популяции некоторого биологического вида с ограничением по пищевым или энергетическим ресурсам:

$$x_{n+1} = a * x_n - b * x_n^2 \quad (15)$$

Линейный член описывает рост (при $a > 0$) или убыль ($a < 0$) численности x , квадратичный член отвечает за ограничение роста (убыли); a и b - некоторые числовые коэффициенты. Если $b = 0$, то явное решение разностного уравнения (1) имеет вид:

$$x_{n+1} = a * x_n; x_n = x_0 * a^n \quad (16)$$

Решение устойчиво при $|a| < 1$ и неустойчиво при $|a| > 1$. Таким образом, из линеаризованного уравнения (16) следует нереалистичное предсказание неограниченного роста численности (закон Мальтуса).

Далее подробно изучим нелинейную модель (15), обычно переписываемую в стандартном виде:

$$y_{n+1} = c * y_n * (1 - y_n) \text{ или кратко } \bar{y} = c * y * (1 - y) = f(y), \quad (17)$$

где $y \in [0, 1]$, $1 \leq c \leq 4$. Условие $c \leq 4$ необходимо для того, чтобы гарантировать принадлежность y_n и $f(y_n)$ единичному интервалу.

При $c \geq 1$ (17) имеет 2 неподвижные точки, которые находим из уравнения

$$y^* - c * y^* * (1 - y^*) = 0, \quad (18)$$

а именно: $y_1^* = 0$, $y_2^* = (c-1)/c \geq 0$ (т.к. $c \geq 1$). Для определения устойчивости неподвижных точек надо оценить $|f_y'(y, c)|_{y=y^*} = c * (1 - 2 * y^*)$. При $1 < c < 3$

получаем, что y_2^* устойчива ($|f_y'| < 1$), а y_1^* - неустойчива ($|f_y'| > 1$). При $c > 3$ обе н.т. становятся неустойчивыми, т.к. $|f_y'|_{y=y_2^*} = |2-c| > 1$, а $|f_y'|_{y=y_1^*} = c > 3$. Оказывается, что простое квадратичное отображение (17) при $3 \leq c \leq 4$ порождает множество многопериодических траекторий (Р-циклов) и хаотических траекторий.

Изучим далее отображение (17), построив при некотором значении параметра "с" график $f(y)$ на плоскости $(\bar{y}, y)$, пользуясь диаграммой Ламерея - Кенигса (рис. 8). График является параболой с положительным максимумом; $f(0) = f(1) = 0$. При $c = 1$ имеем вырожденный случай ($y_1^* = y_2^* = 0$). Начало координат при $c > 1$ всегда неустойчивая н.т., а итерации от любой начальной точки y_0 при $c < 3$ сходятся к точке y_2^* (при $y_0 \neq 0$ и 1) - аттрактору (циклу Ц-1).

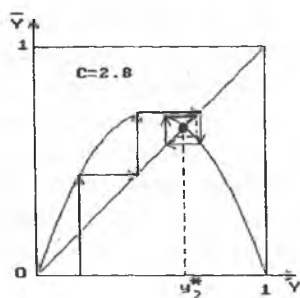


Рис.8.

Параметр "с" задает максимум $f(y, c)$ по y . Изменяя "с", мы деформируем график $f(y)$, что может иметь решающие последствия для всей серии итераций. Пусть, например, $c=3.2$, тогда $|f'|_{y_c} > 1$ и точка y_2^* будет неустойчивой. Графическое построение лестницы Ламерея показывает, что у отображения (17) имеются 2 такие точки y_1^* и y_2^* , что $y_2^* = f(y_1^*)$ и $y_1^* = f(y_2^*)$, т.е. итерации совпадают то с y_1^* , то с y_2^* . Такие точки, как мы уже говорили, образуют Ц-2 (периодическую траекторию с периодом 2, являющуюся аттрактором с периодом 2). Эти точки являются н.т. функции $F(x) = f(f(x))$, определяющей отображение второго возвращения (рис.9). Возникновение Ц-2 для $f^2(y)$ происходит с ростом параметра "с" при потере устойчивости Ц-1 для $f(y)$. Итак, вместо Ц-1 появляется Ц-2: говорят, что произошла бифуркация удвоения периода цикла.

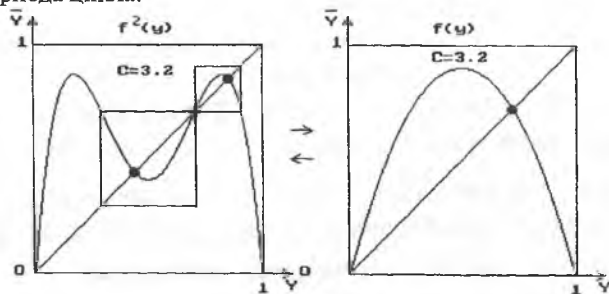


Рис.9.

Что же далее происходит с ростом параметра "с"? График $F(y) = f^2(y)$ продолжает деформироваться, так что неподвижные точки отображения F в конце концов теряют устойчивость и возникают 2 новые н.т. отображения $G(y) = F(F(y)) = f^4(y)$. Это происходит при $c_2 = 1 + \sqrt{6} = 3.449489...$. При $c > c_2$ отображение F не имеет устойчивых н.т., а отображение G имеет 4 устойчивые н.т., которые образуют аттрактор с периодом 4, т.е. снова произошло удвоение периода.

Продолжая увеличивать параметр $c > 3$, мы увидим графически то же явление последовательного удвоения периода в точках бифуркации c_k и появления 2^k -циклов, где $k=3,4,\dots\infty$. Доказано (М.Фейгенбаумом), что значения параметра c , при которых происходит эта бесконечная последовательность бифуркаций удвоения периода, называемая субгармоническим каскадом, обладает замечательным свойством: значения c_k , соответствующие трем последовательным бифуркациям, удовлетворяют закону М.Фейгенбаума:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{c_k - c_{k-1}}{c_{k+1} - c_k} = \delta = 4.6692016\dots (c_{k-1} < c_k < c_{k+1}) \quad (19)$$

Заметим, что $c_\infty = 3.56994\dots$ для отображения (17).

Многочисленными исследованиями доказано, что число Фейгенбаума δ является универсальной константой, не зависящей от деталей нелинейной функции $f(x,c)$ (требуется лишь, чтобы f была трижды дифференцируемой, имела отрицательную производную Шварца и ровно 1 экстремум на $[0,1]$), т.е. это - фундаментальный результат, достойный Нобелевской премии (автор его открытия премию так и не получил). Таким образом, итерируя любое одномерное отображение f , обладающее квадратичным, кубичным и более сложным экстремумом, мы всегда обнаруживаем один и тот же каскад удвоений периода с одним и тем же законом подобия (19), хотя для разных f предел c_∞ будет разным.

Для отображения (17) при $c_\infty \leq c \leq 4$ поведение $\{y_n\}$ становится хаотическим, однако внутри этого интервала существуют очень узкие "окна" строгой периодичности с периодами $P \cdot 2^k$, $P > 1$, $k=1,2,\dots,\infty$. Например, наибольшее окно периодичности $3.8284\dots < c < 3.8496\dots$ содержит циклы с основным периодом $P=3$ (проверьте на компьютере).

Отметим, что динамику логистического отображения исследовали Мэй, Фейгенбаум и другие авторы.

Замечание 1. Хаотическому поведению итераций соответствует на диаграмме Ламерея некоторая сплошная область, "заметаемая" ломаной $A_1 B_1 A_2 \dots$, которая никогда не замыкается.

Замечание 2. Сложную динамику одномерных нелинейных отображений с одним параметром " c " бывает полезно изобразить на компьютере в виде бифуркационной диаграммы, откладывая по оси абсцисс значения параметра в исследуемом диапазоне $c \in [a,b]$, а по оси ординат - все разные экстремумы отображения на асимптотической стадии (например, при n от 1000 до 2000) для данного текущего значения " c ". На рис. 10 для логистического отображения представлена такая диаграмма, имеющая вид "дерева" (верхний график): хорошо видны ветвления в точках бифуркации c_1 , c_2 и c_3 ; ближе к

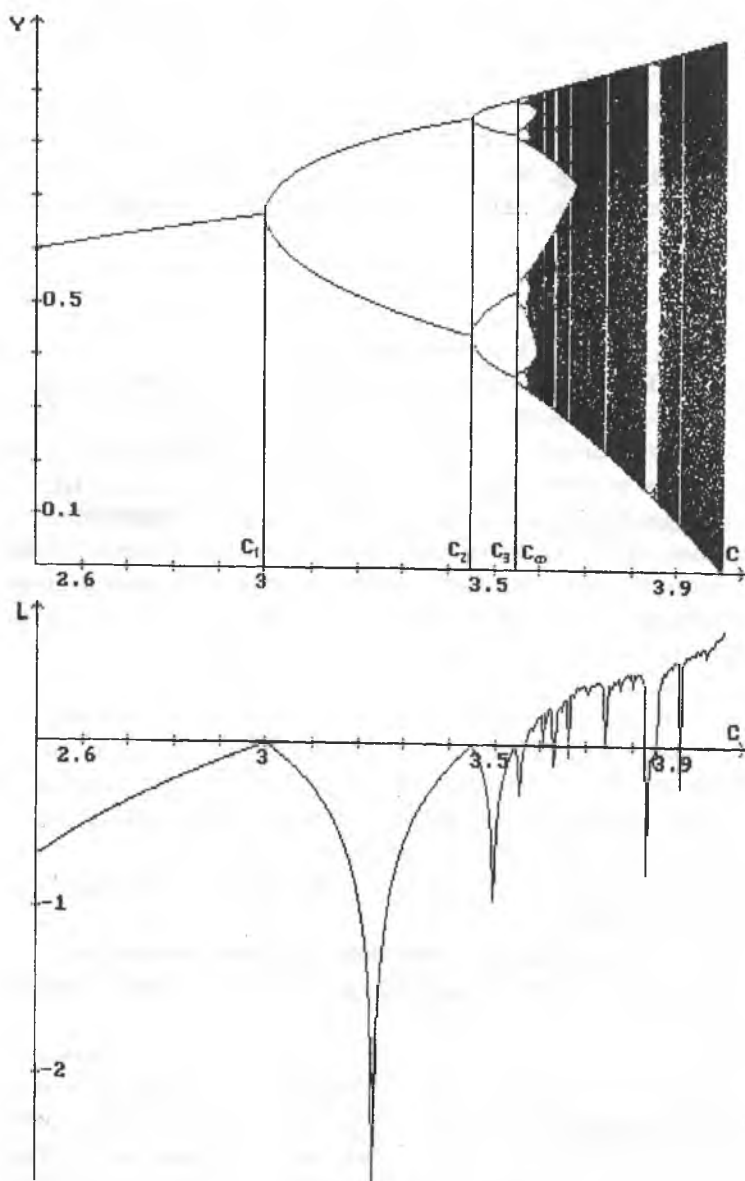


Рис. 10.

точке накопления c_∞ ветви практически сливаются, а при $c > c_\infty$ на темном фоне (хаос) видны окна периодичности в виде светлых полос. Поучительно совместить на одном экране дерево бифуркаций и график единственного показателя Ляпунова $L(c)$ (нижний график). В частности, мы ясно увидим, что в точках бифуркации $L(c)=0$, для хаотических участков $L(c)>0$, а для периодических решений и окон периодичности в интервалах хаотичности $L(c)<0$.

Замечание 3. Удвоение периода и соответствие закону Фейгенбаума (может быть с другим значением константы δ) обнаруживаются не только у одномерных отображений, но и у других математических моделей, а также во многих физических экспериментах. Это означает, что для ряда непрерывных эволюционных процессов сведение к разностному уравнению с помощью сечения Пуанкаре приводит к логистическому отображению. Отсюда следует важная роль отображений в исследовании систем обыкновенных дифференциальных уравнений.

2.8. Разностные системы с запаздывающими аргументами

Динамические системы дифференциальных и разностных уравнений с "запаздываниями" возникают при рассмотрении целого ряда математических моделей процессов переноса, теории автоматического регулирования, в экологии, экономике, физиологии и других науках и приложениях. Термин "запаздывание" означает, что текущее состояние в момент t некоторой эволюционной системы зависит явно от "прошлого", т.е. от состояний в моменты $t-\tau_i$, $i=1,2,\dots,m$. Параметры τ_i - запаздывания считаются известными для конкретной системы; время t может быть непрерывным или дискретным. Обозначим $\tau=\max \tau_i$, где все $\tau_i \geq 0$. При постановке задачи Коши для системы ОДУ или итерируемых отображений необходимо теперь определять начальные условия на отрезке $t \in [-\tau, 0]$, а не только в момент $t=0$.

Иногда системы ОДУ с запаздываниями называют дифференциально-разностными системами.

Рассмотрим для определенности систему итерируемых отображений с запаздываниями и сформулируем для нее задачу Коши, используя краткую запись в векторной форме:

$$X_{n+1}=f(n, X_n, x_{n-k_1}^{(1)}, \dots, x_{n-k_m}^{(m)}, A), n=1, 2, \dots \quad (20)$$

$$X=(x^{(1)}, \dots, x^{(N)}), X \in R^N, f=(f_1, \dots, f_N), A=(a_1, \dots, a_s).$$

$$X_0=g(n) \text{ при } n \in [-k, 0], k=\max k_i, i=1, 2, \dots, m.$$

где $(n-k_i)$ - моменты запаздывания, k_i - целые числа, N - размерность системы (20). Для начала вычислений мы должны знать вектор g начальных условий на целом промежутке изменения дискретного времени n , а при вычислении

правой части при $n > 0$ нужно использовать решения в m точках $n \in [-k, 0]$. Простейшим случаем задания вектора-функции $g(n)$ при $n \in [-k, 0]$ является продолжение в "прошлое" ($n < 0$) постоянных значений при $n = 0$ для каждой искомой вектор-функции $x(n)$.

При качественном анализе непрерывных или дискретных систем с запаздываниями никаких новых принципиальных проблем не возникает по сравнению с системами без запаздываний (неподвижные точки, их число и устойчивость, бифуркации при изменении параметров, хаотизация и т.д.). Поэтому все теоретические достижения в изучении систем без запаздываний полностью пригодны в исследовании решений систем с запаздываниями. Следует отметить, что роль запаздываний может быть различной в динамике конкретных систем (например, хаотизировать решение, бывшее регулярным в системе без запаздывания).

В качестве содержательного примера отображений с запаздыванием рассмотрим экономико-математическую модель взаимодействия производственных, материальных и интеллектуальных ресурсов и их влияния на развитие общества. Модель, имеющая актуальное для России значение, исследована и разработана отечественными специалистами [7, с. 134-140].

Основное предположение авторов при создании математической модели: наука и образование, играющие роль интеллектуального ресурса ("человеческий капитал"), могут оказывать существенное влияние на экономику наряду с обычно учитываемыми факторами - объемом производства и объемом доступных материальных ресурсов. Интеллектуальные ресурсы позволяют быстро осваивать новые виды природных ресурсов и увеличивать их объем; способны порождать при их использовании новые товары и технологии (например, компьютеры, лазеры, спутниковая связь и др.); позволяют решать многие проблемы на качественно ином уровне и затрачивать значительно меньше материальных ресурсов.

Модель включает 3 переменные, зависящие от дискретного времени n , измеряемого в годах (обозначения - как у авторов модели): $X(n)$ - часть объема производства, идущая на поддержание, возобновление и использование ресурсов; $R(n)$ - объем доступных материальных ресурсов; $A(n)$ - объем интеллектуальных ресурсов. Величины X, R и A нормированы на численность населения, в качестве единиц их измерения применялись некоторые условные финансовые единицы. Система разностных уравнений, связывающая ресурсы в n -м и $(n+1)$ -м году, имеет вид:

$$\begin{aligned} X(n+1) &= (p_0 + p_1 * A) * X * R / (R + g * X) \\ R(n+1) &= h + R * (1 - X / (R + g * X)) + b * (A(n-k) / a)^2 \\ A(n+1) &= q * A + f * e * X * A / (A + c * X) \end{aligned} \quad (21)$$

В этой модели 10 параметров, которые обозначены строчными буквами. Аргумент n у переменных в правой части системы опущен, кроме члена $A(n-k)$ с запаздыванием, где $k \geq 0$ - параметр запаздывания, имеющий смысл "время включения специалиста в работу". Вид правых частей системы (21), выбор конкретных значений параметров и начальных условий $X(0)$, $R(0)$ и $A(0)$ обосновываются в указанной работе [7]. Разработанная модель дает качественную и весьма ценную информацию о динамике ресурсов.

В работе [7] обсуждаются также некоторые результаты вычислительных экспериментов с моделью. Эволюция развития прослеживается в течение 70 лет ($n_f=70$). При значениях $k=3, 4$ и 5 варьировались 2 основных параметра: b - параметр, характеризующий освоение новаций ($0 \leq b \leq 6$), e - параметр, характеризующий уровень расходов на интеллектуальную сферу (науку и образование).

Главные выводы проведенного моделирования: необходимость установления государством такого уровня финансирования науки и образования и обеспечение такого уровня усвоения новаций, чтобы не были возможны нарастающие кризисы в экономике, ведущие к спаду производства и даже его коллапсу.

Система (21) включена в набор трехмерных моделей под условным названием "Intel-R" как студенческое задание (см. 3.2.21).

2.9. Признаки хаотической динамики

В ходе физического или (как в нашем случае) вычислительного эксперимента исследователь по некоторым наблюдаемым (измеряемым или вычисляемым) величинам должен идентифицировать динамику колебаний. Приведем наиболее распространенные признаки хаотических колебаний и методы их диагностики.

1. Чувствительная зависимость от начальных условий (ЧЗНУ); обычно характеризуется положительным значением максимального показателя Ляпунова и фрактальными границами области притяжения аттрактора (для диссипативных систем).

2. Растущее усложнение регулярных колебаний по мере изменения некоторого (бифуркационного) параметра математической модели; например, наблюдаемые удвоения периода колебаний (можно вычислить число Фейгенбаума, построить бифуркационную диаграмму).

3. Чередование во времени (непрерывном или дискретном) регулярных периодических колебаний с участками непериодических всплесков или всплесков нерегулярных колебаний (перемежаемый хаос); длительность интервалов регулярных колебаний непредсказуема.

4. Постепенная регуляризация во времени первоначально неупорядоченных колебаний: решения стремятся к некоторому регулярному типу поведения (переходный хаос). Примеры: модели "Feigen-3" (3.1.3), "Cherny" (3.1.7) и "D-torus" (3.2.7).

5. Фрактальные свойства движения фазовой точки в фазовом пространстве или в его проекциях на фазовые плоскости; такое хаотическое или стохастическое движение обычно указывает на присутствие стрannого аттрактора и характеризуется отображениями Пуанкаре сложной структуры и фрактальными размерностями. Примеры: двумерные модели "Нелон" (3.2.1) и "Ginger" (3.2.4).

6. Немонотонность графика отношения последовательных максимумов хотя бы у одной зависимой переменной модели (см. 1.3).

2.10. Дополнительные способы идентификации динамики отображений

Одной из главных задач исследования нелинейных отображений является задача численного определения областей характерного (типичного) их поведения и границ, разделяющих такие области в фазовом пространстве R^N или в пространстве параметров R^S .

В случае $N=1$ мы уже обсуждали некоторые численные алгоритмы построения идентификационных графиков: диаграммы Ламерея-Кенигса, бифуркационной диаграммы и графика зависимости показателя Ляпунова от одного из параметров (бифуркационного параметра).

В случае $N=2$ к задачам идентификации поведения систем нелинейных отображений относятся две задачи построения областей существования ограниченных решений: либо в R^N (значения параметров фиксированы, изменяются начальные условия), либо в R^S (начальные значения фиксированы, изменяются параметры модели). Первая задача характерна для консервативных систем (их динамика зависит, в основном, от выбора начальных условий), вторая задача эквивалентна задаче приближенного построения областей притяжения простых и странных аттракторов диссипативных систем. Известно, что странные аттракторы обладают экзотическими на вид, сильно изрезанными границами областей притяжения (бассейнов) с фрактальными свойствами.

В случае $N \geq 3$ построение характерных областей и границ становится весьма трудоемкой задачей даже при компьютерном моделировании. Поэтому для идентификации динамики моделей используются некоторые функционалы от численных решений: например, алгоритм Бенеттина вычисления спектра показателей Ляпунова и алгоритмы определения фрактальной размерности аттракторов (см., например, [4]); построение

графика автокорреляционной функции; вычисление частотного Фурье-спектра (спектра мощности) по конечным выборкам из временных рядов, полученным на компьютере, с помощью алгоритма БПФ (быстрого преобразования Фурье [5]); анализ серии бифуркационных диаграмм при вариации двух параметров модели для выявления областей притяжения типичного аттрактора (Р-цикла, замкнутых кривых, фрактальных или аморфных множеств точек); построение графика последовательных экстремумов.

Ниже на примере классического для фрактальной геометрии отображения комплексной области на себя

$$Z \rightarrow Z^2 + C \quad (C = a + ib \text{ - комплексное число - параметр}) \quad (22)$$

опишем алгоритм построения специальных областей в C -плоскости и Z -плоскости: множеств Мандельброта и Жюлиа (см. раздел 5).

В действительных переменных x_n, y_n ($Z_n = x_n + iy_n$) комплексное отображение (22) принимает вид двумерного квадратичного отображения с двумя параметрами:

$$x_{n+1} = x_n^2 - y_n^2 + a, \quad y_{n+1} = 2 * x_n * y_n + b$$

Якобиан отображения есть функция x, y : $J = \begin{vmatrix} 2 * x & -2 * y \\ 2 * y & 2 * x \end{vmatrix} = 2 * (x^2 + y^2)$,

который может быть больше 1 (площади увеличиваются) и меньше 1 (площади сжимаются). Поэтому при итерациях можно ожидать как быстро растущих по абсолютной величине решений $x(n), y(n)$, так и остающихся ограниченными при $n \rightarrow \infty$. Заметим что отображение (22) имеет всевозможные Р-циклы со свойством $Z_{n+P} = Z_n^2 + C$ ($P > 1$ - целое число - период).

Чтобы получить множество Мандельброта для некоторой ограниченной области S изменения значений параметров (a, b) область S покрываем регулярной сеткой конечного числа точек $k_1 * k_2$. Последовательно для каждой точки сетки устанавливаем, принадлежит ли она множеству Мандельброта. Опишем соответствующий алгоритм. Фиксируется начальная точка $(0, 0)$ и максимальное количество итераций n_f . Если какая-либо из переменных - x или y на некотором шаге итерации $n \leq n_f$ оказывается по абсолютной величине больше некоторого заданного наперед числа Q (например, $Q = 10^6$), то принимаем, что точка не принадлежит множеству Мандельброта; в противном случае (если на всех шагах итерации до n_f включительно x и y меньше Q) принимаем, что точка принадлежит множеству Мандельброта. Пример: область - прямоугольник $a_1 \leq a \leq a_2, b_1 \leq b \leq b_2$. Его покрываем равномерной сеткой $k_1 * k_2$ точек с шагами $\Delta a = (a_2 - a_1) / (k_1 - 1), \Delta b = (b_2 - b_1) / (k_2 - 1)$. Далее последовательно обходим все точки сетки, например, по вертикалям - снизу вверх, а по горизонталям - слева направо. Каждую точку,

принадлежащую множеству Мандельброта, отмечаем определенным образом (например, при изображении на графическом экране - некоторым цветом М).

Алгоритм для получения множества Жюлиа состоит из трех этапов. На первом этапе для заданного значения константы C на C -плоскости испытываются на неограниченный рост перебираемые одна за другой точки Z -плоскости, рассматриваемые как начальные условия. Алгоритм аналогичен описанному выше алгоритму для получения множества Мандельброта. Точки, в которых решения ограничены, отмечаются (некоторым цветом М). На втором этапе определяется граница области на Z -плоскости, точки которой стремятся к ∞ . Последовательно перебираются все отмеченные на первом этапе точки. Если у некоторой точки имеются соседние неотмеченные точки, то принимается, что каждая такая неотмеченная точка принадлежит множеству Жюлиа; точки, принадлежащие множеству Жюлиа, отмечаются (другим цветом - J). Третий этап состоит в стирании всех точек, помеченных на первом этапе (остаются только точки, помеченные цветом J).

В случае, когда множество ограниченных решений несвязно, более качественные графические картинки изображения множества Жюлиа получаются, если несколько изменить второй этап алгоритма: цветом J отмечать каждую точку, которая была отмечена на первом этапе и которую окружает хотя бы одна неотмеченная точка.

На рис.11 приведены множество Мандельброта (слева) и множество Жюлиа (справа). Параметры и начальные условия выбирались следующим образом: $2.1 \leq a \leq 2.1, -1.5 \leq b \leq 1.5$ для множества Мандельброта, $a = -1, b = 0, -2.1 \leq x_0 \leq 2.1, -1.5 \leq y_0 \leq 1.5$ для множества Жюлиа.

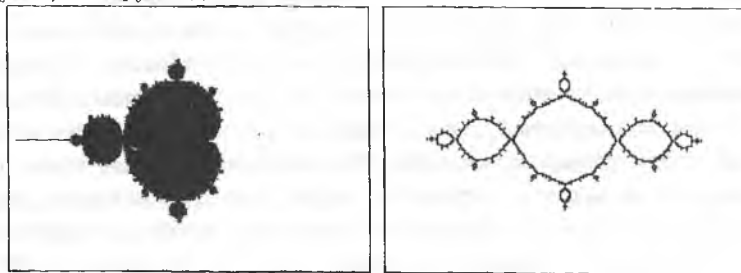


Рис.11.

Замечание. Несмотря на кажущуюся грубость приведенных алгоритмов, с их помощью можно получить хорошее наглядное представление о структуре множеств Мандельброта и Жюлиа. Для получения хороших рисунков достаточно взять сетку размера ~ 300 - 400 точек по вертикали и горизонтали.

Аналогично могут быть построены характерные области для других двумерных отображений и отображений с двумя параметрами.

Раздел 3. Индивидуальные задания на нелинейные итерируемые отображения

При описании моделей отображений будем пользоваться обозначениями, применяемыми в пакете "Нелинейные динамические системы" [13]. Зависимые переменные - решения обозначим $Y1, Y2$, параметры - $A1, A2, \dots$. Индекс "1" у единственной переменной и единственного параметра будем опускать. Индекс "n" у переменных $Y1(n), Y2(n)$ и $Y3(n)$ для простоты записи также будем опускать.

Моделям присвоены условные названия; иногда они совпадают с фамилией автора модели, например, Ikeda, Martin, May и др. У многих моделей после названия в квадратных скобках указан источник - статья, монография на русском языке. Слово "FRACTINT" в ссылке означает модель взята из демонстрационной программы FRACTINT (ее разработчик коллектив авторов из США), находящейся по адресу <http://spanky.triumf.ca/www/fractint/getting.html>. Банк моделей программы FRACTINT содержит очень большое количество различных математических моделей, в том числе с хаотической динамикой и фрактальными свойствами. Допускается задание пользователем на экране начальных условий и управляющих параметров. Особенно впечатляюще цветные картины странных аттракторов и областей их притяжения.

3.1. Одномерные отображения

При итерациях основного отображения " $Y1$ " в качестве дополнительного отображения " $Y2$ " необходимо использовать рекуррентную формулу асимптотического получения показателя Ляпунова, т.е. следует использовать систему:

$$\begin{aligned} Y1(n+1) &= f(a, n), \quad Y1(a, 0) = Y1^* + \varepsilon, \\ Y2(a, n+1) &= Y2(a, n) + \ln(\text{abs}(f'_{Y1}(a, n))), \quad Y2(a, 0) = 0. \end{aligned}$$

Убедитесь в серии вычислительных экспериментов, что в области бифуркаций, найденных пристрелкой для значения указанного в задаче бифуркационного параметра $a_{кр}$ с точностью до пяти значащих цифр, показатель Ляпунова $L(a_{кр}) \approx Y2(a_{кр})/n_k \approx 0$ к финальному моменту $n_k = 10^4$.

Модели Feigen - 1, 2, 3 (см. FRACTINT) изучались Фейгенбаумом в исследованиях перехода к хаосу по сценарию "каскад удвоения периода колебаний" при вариации бифуркационного параметра A .

3.1.1. Модель "Feigen - 1"

$$Y(n+1) = A * Y * Y - 1$$

- 1) Найдите неподвижные точки Y^* и определите по параметру A интервалы их устойчивости (неустойчивости: $|f_Y'(A)| > 1$).
- 2) Что наблюдается в интервале $0.1 \leq A \leq 1.2$?
- 3) Какой финальный ($n_k \approx 10^3, 10^4$) тип решения получается при следующих значениях параметра: $A = 0.8; 1.3; 1.39; 1.395; 1.4$?
- 4) Что наблюдается в интервале $1.4 \leq A \leq 2$?
- 5) Найдите способом пристрелки по A его бифуркационное значение A_∞ с 5-ю верными знаками, соответствующее началу хаотической динамики, каково значение $L(A_\infty)$?

3.1.2. Модель "Feigen - 2"

$$Y(n+1) = Y + A * \sin(\pi * Y)$$

- 1) Найдите неподвижные точки Y^* и определите по параметру A интервалы их устойчивости и неустойчивости.
- 2) Что наблюдается при следующих значениях параметра на финальном отрезке $10^3 \leq n \leq 10^4$: $A = 0.7; 1.11; 1.121; 1.123$?
- 3) Найдите с 5-ю верными знаками значения A , соответствующие началу и концу хаотической динамики; каковы значения показателя Ляпунова в этих точках?
- 4) Проверьте по таблице экстремумов функции $Y(n)$ для интервала $500 \leq n \leq 1000$, что для $A = 1.1245$ существует нестандартный цикл Ц-80.
- 5) Изменится ли интервал хаотичности, если взять $Y(0) = 0.1$?

3.1.3. Модель "Feigen - 3"

$$Y(n+1) = A * \sin(\pi * Y)$$

- 1) Найдите неподвижные точки Y^* и определите по параметру A интервалы их устойчивости и неустойчивости.
- 2) Найдите с 5-ю верными знаками бифуркационные значения A , если известно (проверьте!), что существуют следующие Р-циклы: Ц-2 при $A = 0.8$; Ц-4 при $A = 0.85$; Ц-8 при $A = 0.86$; Ц-16 при $A = 0.865$.
- 3) С такой же точностью найдите 2 значения A , соответствующие началу и концу интервала хаотической динамики; каковы в этих точках значения показателя Ляпунова?
- 4) Проверьте интересный случай $A = 0.87$, когда начальный хаос ($0 < n \leq 450$) внезапно переходит в Ц-20 (смотрите таблицу экстремумов для $Y(n)$).

3.1.4. Модель "Shaw" [3, с.242]

$$Y(n+1)=2*Y*(A+Y), \text{ параметр } A<0.$$

- 1) Найдите неподвижные точки $Y^*(A)$ и определите по A интервалы их устойчивости и неустойчивости, $A \in [-1, -0.7]$.
- 2) Определите хотя бы по одному значению A , при которых наблюдаются в ВЭ периодические решения - циклы Ц-2, Ц-4, Ц-8 и Ц-16.
- 3) Найдите пристрелкой значение $A_{кр}$ с 5-ю верными знаками, начиная с которого возникает хаотическая динамика; каково значение показателя Ляпунова $L(A_{кр})$ на финальной стадии при $n \sim 10^3 - 10^4$?

3.1.5. Модель "May" [15]

$$Y(n+1)=Y*\exp(A*(1-Y))$$

Это уравнение моделирует динамику популяции одного вида с численностью особей Y , которая регулируется эпидемической болезнью. В качестве начальных условий рассмотрите интервал $Y(0)=0.1, \dots, 0.5$, а для параметра A интервал $2 \leq A \leq 4$.

- 1) Проверьте, что при возрастании параметра A , как и у логистического уравнения, переход к хаотической динамике осуществляется через каскад удвоения периода колебаний решения.
- 2) Найдите несколько значений параметра A , при которых наблюдаются циклы Ц-2, Ц-4, Ц-8 и Ц-16 на финальной стадии $1000 \leq n \leq 2000$.
- 3) Определите пристрелкой значение $A_{кр}$ с 5-ю верными знаками, начиная с которого возникает хаотическая динамика; каково значение показателя Ляпунова $L(A_{кр})$ на финальной стадии при $n \geq 2000$?

3.1.6. Модель "Hassel" [15]

$$Y(n+1)=A1*Y*\exp(-A2*\ln(1+Y)), Y(0)=0.1.$$

Модель похожа на биологическую модель "May", но описывает динамику численности сезонно размножающихся насекомых с перекрывающимися поколениями. Поведение решения зависит уже от двух положительных параметров $A1$ и $A2$.

- 1) При значениях $A1=10, 100, 1000$ и при изменении $A2$ с шагом 1 в интервале $1 \leq A2 \leq 10$ проведите серию ВЭ (30 вариантов решений) и идентифицируйте динамику решений с ростом n до 3000.
- 2) В первом квадранте плоскости $(A1, A2)$ на основе данных п.1 укажите примерные границы следующих областей типового поведения при $n \rightarrow \infty$:
 - монотонного стремления $Y(n)$ к неподвижной точке Y^* ;
 - колебательного с затуханием стремления $Y(n)$ к Y^* ;
 - устойчивых P -циклов ($P=2, 4, 8, 16$);

- хаотического поведения.

Используйте для идентификации финального решения таблиц экстремумов при $2000 \leq n \leq 3000$ и значения показателя Ляпунова.

3.1.7. Модель "Chernv"

$$Y(n+1) = (A1 * \exp(-A2 * n)) * Y * (1 - Y * Y), Y(0) = 0.1$$

Это пример кубического неавтономного отображения, у которого по утверждению авторов [19], при некоторых значениях параметра $A2 > 0$ и фиксированном значении $A1$ возможен переход из области хаотического поведения в область с несколькими устойчивыми стационарными состояниями (так называемый "перемешивающийся слой", который реализован в некоторых широко известных азартных играх, например, в рулетке и китайском билиарде). В серии ВЭ положите $A2 = 0.001$.

1) Проверьте при нескольких положительных и отрицательных значениях $A1$, что:

- устойчивое финальное состояние всегда нулевое ("смерть для Y");
- возникающее с момента рождения при $n=0$ хаотическое решение с некоторого момента $n=n_{кр}(A1, A2)$ переходит с ростом n к циклическим затухающим колебаниям;
- отличная от стационара "жизнь" модели продолжается примерно $1/A2$ дискретного времени и при $A2=0$ модель "живет вечно";

2) Найдите несколько точек перехода от хаоса к порядку для ряда положительных и отрицательных значений $A1$.

3.1.8. Модель "Logistica" [5.с.221]

$$Y(n+1) = A * Y * (1 - Y)$$

1) Подтвердите своими расчетами все утверждения п. 2.7 данного пособия о динамике логистического отображения на отрезке $y \in [0, 1]$ при изменении параметра A от 1 до 4.

2) Найдите с 5-ю верными знаками значения A при бифуркациях р-циклов для $p=2, 4, 8, 16, \infty$ и соответствующие значения Ляпуновского показателя $L(A_p)$.

3) Пр продемонстрируйте существование Ц-3 и простых неподвижных точек.

4) Составьте пограммный модуль одновременного построения на экране бифуркационной диаграммы и графика $L(A)$ для $2 \leq A \leq 4$ с шагом $\Delta A = 0.05$ по численным данным на асимптотической стадии итераций ($4000 \leq n \leq 5000$).

3.1.9. Модель "Price"

Модель формирования цены товара "Y", позволяющая исследовать устойчивость рыночных механизмов в зависимости от характеристик технологии технологической структуры экономики (вывод модели см. в [8], с. 118-125), имеет вид одномерного отображения с двумя параметрами A и B:

$$Y(n+1)=A*Y*(1-Y^B), \quad y(0)=\left(\frac{1}{1+B}\right)^{\frac{1}{B}},$$

где Y - цена товара в момент n, параметр A характеризует запас (например, избыток мощностей по производству товара). Известно, что параметр $B \geq 1$ увеличивается в соответствии с увеличением темпа роста экономики. Заметим, что при $B=1$ имеем классическое логистическое уравнение - см. п.2.7.

Определите динамику ценообразования, найдите аттракторы и 4 точки бифуркации.

1) Установите сценарий перехода к хаосу для случаев $B=2;3$ при изменении параметра $A \in (0; A_{\max})$, где $A_{\max}(B) = 1/B * (1+B)^{(1+B)/B}$.

2) Как изменяются интервалы хаотичности с ростом B?

Используйте вычисления производной Шварца и показателя Ляпунова.

3.1.10. Модель "Neyman -1" [9]

Модель рассматривалась Дж.фон Нейманом как простейший генератор псевдослучайных чисел:

$$Y(n+1)=1-A*\sqrt{\text{abs}(Y)}$$

Исследуйте динамику данного отображения при $n \rightarrow \infty$.

1) Определите знак производной Шварца в зависимости от A.

2) Найдите области существования неподвижных точек, их число и устойчивость, области притяжения.

3) Каков интервал хаотичности по A? Постройте на экране бифуркационную диаграмму совместно с графиком Ляпуновского показателя $L(A)$, $1 < A < 3$. Каков процесс перехода "хаос $\leftrightarrow$ порядок"? Как долго существует хаос?

3.1.11. Модель "Neyman 2" [9]

$$Y(n+1)=1-A*\text{abs}(Y)$$

Эта модель по динамике в чем-то аналогична предыдущей модели.

Проведите такое же исследование, как для модели "Neyman -1".

При каких значениях параметра A эту модель можно использовать в качестве генератора псевдослучайных чисел?

3.1.12. Модель "Cycle" [4, с.90,283]

Известно, что модель динамики двух связанных осцилляторов порождает двумерный тор T^2 . Сечение Пуанкаре вдоль малой его окружности приводит к одномерному отображению окружности на себя, которое в наиболее популярном в теории стандартном виде представимо отображением:

$$y(n+1) = \text{frac}(Y + A + (B/(2\pi)) \cdot \sin(2\pi \cdot Y)), \quad Y(0) = 0.2,$$

где $\text{frac}(C)$ - дробная часть аргумента C ; параметры A и B - вещественные числа.

Каждая итерация соответствует траектории одного из осцилляторов вдоль большой окружности тора. При $A=0$ параметр B есть число вращений, т.е. отношение частот колебаний несвязанных осцилляторов. При $B \neq 0$ решения могут быть периодическими, квазипериодическими и хаотическими.

1) Исследуйте динамику отображения при $0 < A < 1$ ($\Delta A = 0.1$) для $B = 0.4, 0.6$ и 0.8 .

2) Найдите пары (A, B) , при которых наблюдаются: неподвижные точки, циклы Ц-2, Ц-3, Ц-32 и хаос.

3.2. Системы двумерных и трехмерных отображений

3.2.1. Модель "Henon" [4, с.37], [5, с.48]

Модель представляет квадратичное отображение плоскости на себя (обратимое):

$$Y1(n+1) = 1 + Y2 - A1 \cdot Y1 \cdot Y1$$

$$Y2(n+1) = A2 \cdot Y1$$

$$Y1(0) = 0.7, \quad Y2(0) = 0.1$$

1) Получите известный странный аттрактор Энона на фазовой плоскости после примерно $n_f = 1000$ итераций отображения при $A1 = 1.4$ и $A2 = 0.3$; убедитесь по графикам $Y1(n)$ и $Y2(n)$ и их экстремумов, что решение хаотическое.

2) Варьируя параметры $0 < A1 < 2$ и $0 < A2 \leq 1$, определите численно на плоскости $(A1, A2)$ примерные границы существования странного аттрактора и его деформации, области устойчивых периодических решений и неподвижных точек.

3.2.2. Модель "Holms" [4, с.282]

$$Y1(n+1) = Y2$$

$$Y2(n+1) = -A1 \cdot Y1 + A2 \cdot Y2 - A3 \cdot Y2 \cdot Y2 \cdot Y2$$

Модель представляет кубичное отображение плоскости на себя. Рассмотрите начальное условие $Y(0) = (0.1, 0.1)$. Исследуйте и объясните полученные решения при $A3 = 1$, $A2 = 2.77$ и следующих значениях параметра

$A1: 0.25, 0.26, 0.27, 0.3, 0.5$. Найдите с пятью знаками после запятой бифуркационные значения $A1$, соответствующие началу и концу интервала хаотической динамики.

3.2.3. Модель "Hopalong" [FRACTINT]

$$Y1(n+1)=Y2-\text{sign}(Y1)*\text{sqrt}(\text{abs}(A2*Y1-A3))$$

$$Y2(n+1)=A1-Y1$$

В качестве начальных условий используйте $Y(0)=(0,0)$ либо $(1,1)$.

1) Изучите динамику системы в зависимости от начальных условий и при следующих тройках A_i :

$A1$	1	1	3	0.4	0.4	0.4
$A2$	1	0	1	1	1	1
$A3$	0	1	0	1	2	0

Объясните получающиеся решения $Y_i(n)$ и наборы точек в фазовой плоскости ($n_k \sim 10^3, 10^4$).

2) Рассмотрите теперь $Y(0)=(0.2, 0.2)$. Что теперь наблюдается в фазовой плоскости, каково поведение экстремумов $Y_i(n)$?

3.2.4. Модель "Ginger" [FRACTINT]

$$Y1(n+1)=1-Y2+\text{abs}(Y1)$$

$$Y2(n+1)=Y1, (0 \leq n \leq 3000)$$

Модель демонстрирует сильную зависимость решения от начальных данных $Y1(0)=A1, Y2(0)=A2$. При вариации параметров $A1$ и $A2$ могут возникать различные периодические решения (циклы) в плоскости $(Y1, Y2)$ и своеобразные множества точек определенной структуры (хаотические решения). Объясните получающиеся решения для следующего набора параметров: $(A1, A2)=(-1, -1), (-1, 1), (1, 2), (-2, 2), (-1, 2), (-5, 5), (0, -0.1), (-0.1, 0)$.

3.2.5. Модель "Mira"

$$Y1(n+1)=A2*Y2+W(Y1)$$

$$Y2(n+1)=W(Y1)-Y1,$$

$$\text{где } W(Y1)=A1*Y1+2*(1-A1)*Y1*Y1/(1+Y1*Y1).$$

При $A2=1$ и $Y(0)=(0.5, 0.5)$ рассмотрите следующие значения $A1 < 0$: $-0.1; -0.5; -0.6; -0.062; -0.065; -0.068; -1; -1.25$. Поясните финальные образы ($n \approx 5000$) на фазовой плоскости, наблюдаемые бифуркации. Каков сценарий перехода к хаосу?

3.2.6. Модель "Martin"

$$Y1(n+1)=Y2-\sin(Y1)$$

$$Y2(n+1)=A1-Y1$$

$$Y1(0)=0, Y2(0)=0.$$

Получите и проанализируйте возникающие множества точек на фазовой плоскости $(Y1, Y2)$ при $n \approx 3000$ для следующих значений параметра $A1$: 1; 1.57, 3, 3.14, 6.28, 7, 11. Изменяются ли на плоскости финальные структуры, если взять другое начальное условие, например, $Y(0)=(1,1)$. Есть ли среди численных решений периодические и хаотические?

3.2.7. Модель "D-torus"

$$Y1(n+1)=Y2+A2*Y1$$

$$Y2(n+1)=A1*Y2*(1-Y1)$$

$$Y(0)=(0.1, 0.1), n_f=10000.$$

Модель демонстрирует периодическое, квазипериодическое и хаотическое поведение при вариации параметров $A1$ и $A2$, причем при некоторых значениях хаотическое вначале решение $Y_i(n)$ становится с ростом n регулярным (эволюция "хаос - порядок"). При $A1=2.2$ найдите значения $A2 \in [0.1, 0.3]$, для которых реализуются различные типы динамики; анализируйте графики $Y_i(n)$ и множества точек на фазовой плоскости $(Y1, Y2)$.

3.2.8. Модель "KAM torus"

$$Y1(n+1)=Y1*\cos(A1)+(Y1*Y1-Y2)*\sin(A1)$$

$$Y2(n+1)=Y1*\sin(A1)-(Y1*Y1-A2*Y2)*\cos(A1)$$

Рассмотрите следующие значения $A1$ при $A2=1$ и поясните финальные образы на фазовой плоскости ($n \approx 5-10$ тыс.): ± 3.14 при $Y(0)=(0.2, 0.2)$; 1.48 при $Y(0)=(-0.4, -0.4)$; 1.7, 1.8 и 2.0 при $Y(0)=(0.4, 0.4)$. Объясните, что происходит с решением системы, когда: 1) $A1 \leq 0.849$, 2) $1.5 < A1 \leq 1.55$.

3.2.9. Модель "Хищник-жертва" [9]

Простейшее отображение, описывающее взаимодействие жертвы $Y1$ и хищника $Y2$ (разностный аналог системы ОДУ, предложенной В.Вольтеррой), имеет вид:

$$Y1(n+1)=A1*Y1*(1-Y1)-A2*Y1*Y2$$

$$Y2(n+1)=-A3*Y2+A4*Y1*Y2-A5*Y2*Y2$$

$$Y(0)=(0.5, 0.5).$$

Все коэффициенты A_i положительны; $Y1$ и $Y2$ - численности жертвы и хищника.

Проверьте следующие случаи динамического поведения модели при $A_1=4$, $A_2=1$, $A_3=0.02$, $A_5=0.3$ и вариации A_4 ($n \sim 10^3$):

- 1) неподвижные точки для $2.5 \leq A_4 \leq 2.9$;
- 2) цикл Ц-2 при $A_4=2$;
- 3) цикл Ц-4 при $A_4=1.98$ и Ц-8 при $n > n_{\text{критич}}=150$ и $A_4=1.94$ (переход "хаос - порядок"); найдите точку бифуркации Ц-4 $\Rightarrow$ Ц-8 с 5-ю знаками в A_4 .
- 4) хаос при $A_4=1.92$ и $A_1=2.95$;
- 5) переход "хаос-1" в "хаос-2" при $n=n_{\text{критич}}$ (найдите это значение), когда для $n > n_{\text{критич}}$ $Y_2(n)=0$ (вымирание хищника "усиливает" хаотическую жизнь жертвы);

3.2.10. Модель "Рорсом" [FRACTINT]

$$Y_1(n+1)=Y_1-A_1 \sin(Y_2+\tan(A_2 \cdot Y_2))$$

$$Y_2(n+1)=Y_2-A_1 \sin(Y_1+\tan(A_2 \cdot Y_1))$$

Начинайте итерации от точки $Y(0)=(0;1)$.

1) Наблюдайте образование структур точек в фазовой плоскости до $n \approx 10000$ при $A_1=0.05$ и следующих значениях A_2 : 0.1; 0.5; 1; 3; 5.

2) Что происходит с решением на финальной стадии при фиксированном значении A_2 для $A_1=0.1$; 0.5; 1?

3.2.11. Модель "Паразит - хозяин" [9]

Сообщество "паразит - хозяин" в простейшем случае можно смоделировать следующей системой отображений:

$$Y_1(n+1)=A_1 \cdot Y_1 \cdot (1-Y_1) - A_2 \cdot Y_1 \cdot Y_2$$

$$Y_2(n+1)=-A_3 \cdot Y_2 + A_4 \cdot Y_1 \cdot Y_2$$

$$Y(0)=(0.2;0.2); A_i > 0,$$

В этой системе Y_1 и Y_2 - численности хозяина и паразита.

Проверьте случаи динамического поведения модели при $A_1=4$, $A_2=1$ и вариации A_3 ; A_4 .

1) Различные неподвижные точки при $n > n_{\text{кр}}$ для $A_4=2$ и $0.15 \leq A_3 \leq 0.17596$, причем для $A_3=0.175968$ наблюдается участок хаотической динамики; найдите $n_{\text{кр}}$.

2) Цикл Ц-2 до $n_{\text{кр}}=260$, затем $Y_2 \approx 0$, а Y_1 становится хаотично при $n > n_{\text{кр}}$.

3) При $A_4=3$, $A_3=0.17597$ наблюдаем динамический хаос вплоть до $n=10000$ по графикам $Y(n)$ и замкнутую кривую на фазовой плоскости для $1000 \leq n \leq 10000$.

4) При $A_4=3.6$, $A_3=0.17597$ возникает ограниченное множество точек ($n \approx 10000$) на фазовой плоскости (хаос).

3.2.12. Модель "Zisook" [3, с.245]

$$Y1(n+1)=2*A1*Y1*(1-Y1)-Y2$$

$$Y2(n+1)=A2*Y1$$

$$Y(0)=(0.1,0.1)$$

Данное отображение при $A2=0$ превращается в одномерное логистическое и обладает всеми его необычными свойствами. Используйте это обстоятельство при тестировании двумерной системы.

1) Исследуйте поведение двумерного отображения при следующих парах значений параметров:

A1	1.8	1.8	1.8	0.5	0.8	0.82	0.826	0.827	0.7
A2	0.05	0.02	0.01	1	1	1	1	1	0.9

2) Укажите, для каких пар $(A1, A2)$ при $n \approx 5000$ наблюдаются периодические, квазипериодические и хаотические решения $Y_i(n)$. Какие точечные объекты возникают на фазовой плоскости $(Y1, Y2)$?

3.2.13. Модель "МЭИ-97" ([20])

Исследуйте динамику двумерной системы кубичных отображений с параметрами $A1$ и $A2$:

$$Y1(n+1)=-Y2+Y1*(Y1*Y1+Y2*Y2-A1)$$

$$Y2(n+1)=Y1+Y2*(Y1*Y1+Y2*Y2-A2)$$

1) Найдите неподвижные точки; определите их область существования и устойчивость по $A1$ и $A2$.

2) По полученным на фазовой плоскости структурам точек идентифицируйте поведение системы для $Y(0)=(0.2, 0.2)$ и следующих пар значений $(A1, A2)$: $(0, 1); (1, 0); (-0.1, 1); (0.1, 1); (1, 1); (2, 2); (0.36, 1)$.

3.2.14. Модель "Pickover"

$$Y1(n+1)=\sin(A1*Y2)-Y3*\cos(A2*Y1)$$

$$Y2(n+1)=Y3*\sin(A3*Y1)-\cos(A4*Y2)$$

$$Y3(n+1)=\sin(Y1)$$

Начинать итерации трехмерного отображения можно от точек $Y(0)=(0, 0, 0)$ и $Y(0)=(1, 1, 1)$. Наблюдайте на фазовой плоскости возникающие множества точек для следующих наборов параметров:

$(A1, A2, A3, A4) = (1, 1, -1, -1), (1, 1, 1, 1), (2, 2, -2, -2), (2, -2, 2, -2), (2.24, 0.43, -0.65, -2.43)$.

Имеются ли периодические и хаотические решения на финальной стадии $n_f \approx 5-10$ тыс.?

3.2.15. Модель "Ikeda"

$$Y1(n+1)=1+A2*(Y1*\cos(Y3)-Y2*\sin(Y3))$$

$$Y2(n+1)=A2*(Y1*\sin(Y3)+Y2*\cos(Y3))$$

$$Y3(n+1)=A1-A3/(1+Y1^2+Y2^2)$$

$$Y(0)=(0.1,0.1,0.1)$$

Получите и объясните возникающие структуры на фазовых плоскостях, интегрируя 3D систему до $n \approx 5000$ для следующих наборов коэффициентов $A1$ и $A2$ ($A3=1$): $(A1,A2)=(2,-1),(1,1),(2,2),(3,1),(-1,1),(4,1)$.

3.2.16. Модель "Diapause" [18]

$$Y1(n+1)=A1*Y1+A2*Y3$$

$$Y2(n+1)=A1*Y1+(1-A1)*Y3$$

$$Y3(n+1)=A2*Y2*\exp(-A3*(1-Y2))$$

Это модель популяции насекомых с диапаузой в дискретном времени n . В каждом поколении n выделяются 3 периода развития. Пусть $Y1(n)$ - численность популяции в конце первого периода n -го поколения, $Y2(n)$ - то же в конце второго периода и $Y3(n)$ - в конце третьего периода, причем $A1$ ($0 \leq A1 \leq 1$) особей уходит в диапаузу в конце первого периода, а в третьем периоде численности особей изменяются по закону Р.Мея (логистика); $A2$ ($0 < A2 \leq 10$) - скорость роста популяции при благоприятных условиях.

1) Исследуйте динамику системы для следующих пар значений параметров $A1$ и $A2$ ($A3=-0.01$):

$A1$: 0; 0.1; 0.2; 0.2; 0.5

$A2$: 10; 7.5; 7.5; 10; 3.73.

2) Идентифицируйте для каждой пары $(A1,A2)$ множества точек ($n \approx 5000$) на фазовой плоскости $(Y1,Y2)$.

3) Имеются ли Р-циклы и хаотические траектории? Каков сценарий перехода к хаосу?

3.2.17. Модель "Рах"

Следующая система является простым обобщением на трехмерный случай известной модели Энона (см. 3.2.1):

$$Y1(n+1)=1-A1*Y1*Y1+Y2$$

$$Y2(n+1)=A2*(Y1+Y3)/2$$

$$Y3(n+1)=1-A1*Y3*Y3+Y2$$

В частном случае $A1=A3$ первое и второе уравнения совпадают, и система эквивалентна системе Энона (используйте это обстоятельство для тестирования 3D системы, получив при $A1=1.4$ и $A2=0.3$ известный странный аттрактор типа подковы).

Исследуйте динамику системы и идентифицируйте финальные ($n \approx 5000$) состояния для следующих значений коэффициентов A_1 и A_3 при $A_2=0.3$ и начальном условии $Y(0)=(0,0,0)$:

A_1	1.3	1.4	1.1	1.3	1.3	1.3
A_3	0	0.8	0.8	0.9	0.1	0.6

3.2.18. Модель "Ball" [4], с.282

Модель описывает движение шарика, подпрыгивающего на вибрирующем столе.

$$Y_1(n+1) = \text{frac}((1+A_1)*Y_1 + A_2*\sin(Y_2))$$

$$Y_2(n+1) = Y_2 + \text{frac}((1+A_1)*Y_1 + A_2*\sin(Y_2))$$

$$-1 < A_1 < 1, A_2 > 1$$

Запись $\text{frac}(x)$ означает "дробная часть x ".

При $A_1=0$ имеем консервативный случай (якобиан $J=1$). При $A_1 < 0$ можно получить неподвижные точки, при $A_1 > 0$ - квазипериодические и хаотические решения.

Идентифицируйте финальные решения ($n \approx 5000$) при $Y(0)=(0.1, 0.1)$ для следующих пар коэффициентов A_i :

A_1	-0.01	0.01	0.01	0	0.1	0.2	0.3
A_2	1.5	1.5	2	1.5	1.5	1.5	5

3.2.19. Модель "Kaplan-Yorke" [4], с.285

$$Y_1(n+1) = \text{frac}(A_2*Y_1)$$

$$Y_2(n+1) = A_1*Y_2 + \cos(2*\pi*Y_1)$$

$$-1 < A_1 < 1, Y(0)=(0.1, 0.1)$$

Запись $\text{frac}(x)$ означает "дробная часть x ".

1) Убедитесь, что при $A_1=0.2$ и для $1 < A_2 < 2$ отображение имеет странный аттрактор, меняющий форму при изменении A_2 .

2) Проверьте, что при $A_2=2$ после примерно 40 итераций Y_1 становится равным 0. В то же время расчеты вручную показывают, что при $A_2=2$ для Y_1 должен существовать цикл: например, при $Y_1(0)=0.1$ последующие значения Y_1 равны 0.2, 0.4, 0.8, 0.6, 0.2 и т.д. Объясните это несовпадение. Для этого вспомните, как представлены числа в памяти компьютера и как выполняется умножение на 2. Попробуйте исправить первое уравнение так, чтобы результаты, получаемые на ЭВМ, совпадали с расчетами вручную.

3) Проследите, как меняется форма странного аттрактора при $A_1=0.2$ и $A_2=1.01, 1.5, 3, 7, 9$.

4) Что происходит при $A_1=0.2$ и $A_2=4, 5, 6, 8$?

5) Зависит ли вид странного аттрактора при фиксированных A_1 и A_2 (например, $A_1=0.3$, $A_2=3$) от выбора начальной точки наугад из единичного квадрата?

3.2.20. Модель "Zaslavsky" [4], с.89.

$$Y_1(n+1) = \exp(-A_1) * (Y_1 + A_2 * \sin(2 * \pi * Y_2))$$

$$Y_2(n+1) = \text{frac}(Y_2 + A_3 / (2 * \pi) * (1 + (1 - \exp(-A_1) / A_1) * Y_1) + A_4 / A_1 * \sin(2 * \pi * Y_2))$$

Запись $\text{frac}(x)$ означает "дробная часть x ".

Известно [4], что это отображение сжимает площади при $A_1 > 0$ и сохраняет их при $A_1 = 0$; имеет простые и кратные неподвижные точки; кроме того, при значениях $A_2 < 1$ и при условии

$$1 < A_1 / (1 - \exp(-A_1)) < A_4 = (A_2 * A_3) / (2 * \pi)$$

имеет хаотические решения.

Поясните финальные решения ($n \approx 5000$) для следующих наборов значений параметров A_i при $Y(0) = (0.3, 0.1)$:

A1	A2	A3	A4
1	0.3	6.28	0
0.1	0.3	6.28	0.0001
0.05	0.03	100	0.05
0.15	0.3	6.28	0.0001
0.02	0.3	6.28	0
0.001	0.7	6.28	0
0.01	0.3	6.28	0.001
0.01	0.3	6.28	0.0001

3.2.21. Модель "Intel-R" [7]

Модель описывает в государстве Анчурия динамику основных взаимодействующих ресурсов (производственных, материальных и интеллектуальных) в дискретном времени n . Вид исследуемой трехмерной системы с одним запаздывающим аргументом, обозначения переменных и параметров приведены в п.2.8 данного пособия. Наряду с краткой постановкой проблемы, в задании предлагается повторить авторские результаты и их содержательно проинтерпретировать в смысле развития общества (экономики) при следующих начальных условиях и фиксированных параметрах модели:

$$X(0) = 0.05, R(0) = 10, A(0) = 0.01,$$

$$p_0 = 1.2, p_1 = 10, g = 1, h = 0.5, q = 0.5, f = 1.15, a = 0.03, k = 5, n_f = 70$$

для четырех вариантов (b - уровень освоения новаций, e - уровень финансирования науки и образования):

- 1) $b = 0$, $e = 0.01$ (экономика невосприимчива к нововведениям);

- 2) $b=1.5$, $e=0.01$ (усвоение новаций достаточно);
- 3) $b=1.5$, $e=0.005$ (по сравнению с предыдущим случаем финансирование интеллектуальной сферы урезано вдвое);
- 4) $b=1$, $e=0.015$ (усвоение новаций недостаточно, финансирование интеллектуальной сферы увеличено).

3.2.22. Модель "Mandelbrot"

Квадратичное отображение комплексной плоскости на себя $Z \rightarrow Z^2 + C$ в действительных переменных имеет вид:

$$Y1(n+1) = Y1 * Y1 - Y2 * Y2 + A1$$

$$Y2(n+1) = 2 * Y1 * Y2 + A2$$

($Z = Y1 + Y2 * i$, $C = A1 + A2 * i$). Задание заключается в разработке программного модуля построения области на плоскости ($A1, A2$), в которой решения $Y1$ и $Y2$ остаются ограниченными при любых n , т.е. требуется построить множество Мандельброта (см. 2.10). Предлагается использовать алгоритм, описанный в 2.10: выбирается прямоугольник на плоскости ($A1, A2$): $A3 \leq A1 \leq A4$, $A5 \leq A2 \leq A6$, он покрывается равномерной сеткой и ограниченность решения исследуется в каждой точке сетки. Точки, принадлежащие множеству Мандельброта, рекомендуется отмечать некоторым цветом $A7$. В качестве критерия ограниченности Q можно взять число 10^6 , максимальное количество итераций - 300.

В ходе вычислительных экспериментов варьируются размеры прямоугольника и цвет $A7$. Цель ВЭ - добиться наиболее эффективного изображения множества Мандельброта на экране.

3.2.23. Модель "Julia"

Задание аналогично предыдущему, но строится множество Жюлиа. Требуется разработать программный модуль построения границы той области на плоскости ($Y1, Y2$), в которой решения отображения

$$Y1(n+1) = Y1 * Y1 - Y2 * Y2 + A1$$

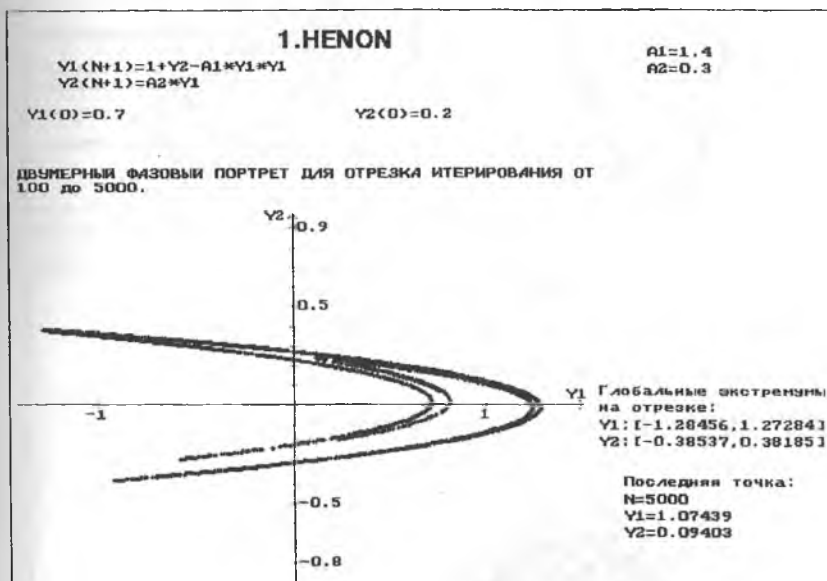
$$Y2(n+1) = 2 * Y1 * Y2 + A2$$

являются неограниченными при заданной паре параметров ($A1, A2$) и $A3 \leq Y1(0) \leq A4$, $A5 \leq Y2(0) \leq A6$.

В ходе вычислительных экспериментов варьируются размеры прямоугольника и параметры $A1$ и $A2$; цель ВЭ - получить 3-4 эффективных множества Жюлиа.

Раздел 4. Иллюстративный материал (2D и 3D системы)

В этом разделе в качестве иллюстраций представлены копии графических экранов, полученных с помощью программного комплекса "Нелинейные динамические системы" [13]. На каждой иллюстрации указаны: название модели, вид системы, значения начальных условий и параметров, значения глобальных экстремумов на выбранном интервале изменения n , значения переменных на последней итерации (последняя точка) и вид множества точек в фазовой плоскости. Значения начальных условий и параметров соответствуют одному из хаотических режимов, имеющихся у данной модели.



2.HOLMS

$$Y1(N+1)=Y2$$

$$Y2(N+1)=-A1*Y1+A2*Y2-A3*Y2*Y2$$

$$A1=0.1$$

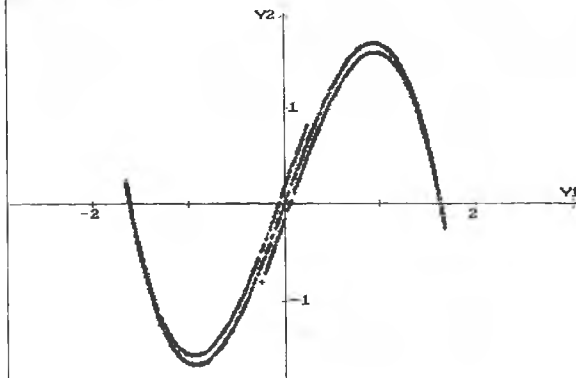
$$A2=2.7$$

$$A3=1$$

$$Y1(0)=0.5$$

$$Y2(0)=0.1$$

ДВУМЕРНЫЙ ФАЗОВЫЙ ПОРТРЕТ ДЛЯ ОТРЕЗКА ИТЕРИРОВАНИЯ ОТ 100 до 3000.



Y1 Глобальные экстремумы на отрезке:

$$Y1: [-1.67035, 1.67015]$$

$$Y2: [-1.67035, 1.67015]$$

Последняя точка:

$$N=3000$$

$$Y1=1.64052$$

$$Y2=-0.07057$$

3.HOPALONG

$$Y1(N+1)=Y2(N)-SG(Y1(N))*SQRT(ABS(A2*Y1(N)-A3))$$

$$Y2(N+1)=A1-Y1(N)$$

$$A1=9$$

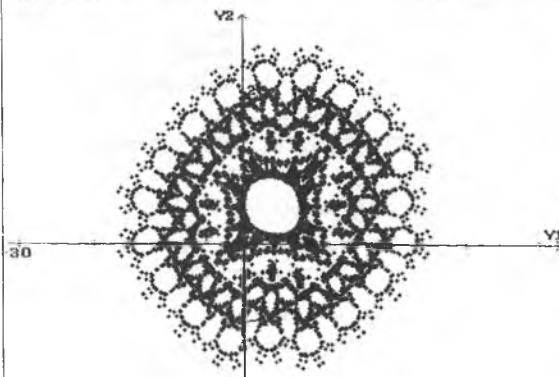
$$A2=0.4$$

$$A3=3$$

$$Y1(0)=1$$

$$Y2(0)=0$$

ДВУМЕРНЫЙ ФАЗОВЫЙ ПОРТРЕТ ДЛЯ ОТРЕЗКА ИТЕРИРОВАНИЯ ОТ 100 до 15000.



Глобальные экстремумы на отрезке:

$$Y1: [-16.73, 25.04]$$

$$Y2: [-16.04, 25.73]$$

Последняя точка:

$$N=15000$$

$$Y1=-9.17344$$

$$Y2=2.60281$$

4. GINGER

$$V1(N+1)=1-V2+ABS(V1)$$

$$V2(N+1)=V1$$

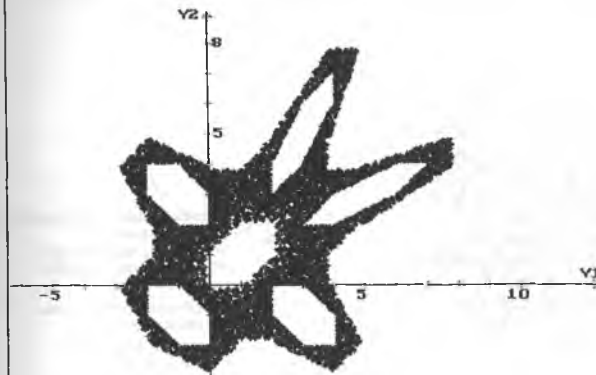
$$A1=0$$

$$A2=-0.1111$$

$$V1(0)=0$$

$$V2(0)=-0.1111$$

ДВУМЕРНЫЙ ФАЗОВЫЙ ПОРТРЕТ ДЛЯ ОТРЕЗКА ИТЕРИРОВАНИЯ ОТ 100 до 10000.



Глобальные экстремумы
на отрезке:

$$V1: [-2.81738, 7.78627]$$

$$V2: [-2.81738, 7.78627]$$

Последняя точка:

$$N=10000$$

$$V1=3.62531$$

$$V2=3.68927$$

5. MIRA

$$V1(N+1)=A2*V2+M(V1)$$

$$V2(N+1)=M(V1)-V1$$

$$M(X): M=A1*X+2*(1-A1)*X*X/(1+X*X)$$

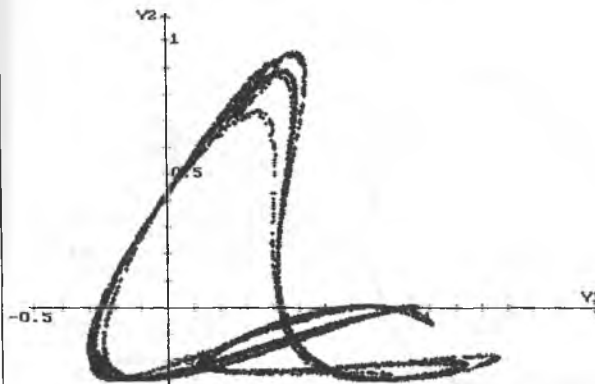
$$A1=-1$$

$$A2=1$$

$$V1(0)=0.5$$

$$V2(0)=0.5$$

ДВУМЕРНЫЙ ФАЗОВЫЙ ПОРТРЕТ ДЛЯ ОТРЕЗКА ИТЕРИРОВАНИЯ ОТ 100 до 10000.



Глобальные экстремумы
на отрезке:

$$V1: [-0.30528, 1.26409]$$

$$V2: [-0.26977, 0.95155]$$

Последняя точка:

$$N=10000$$

$$V1=-0.25034$$

$$V2=-0.20411$$

6.MARTIN

$A1=3.1$

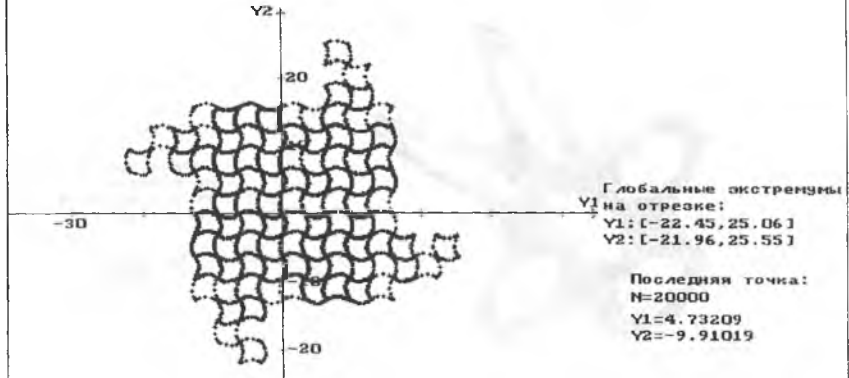
$$Y1(N+1)=Y2-SIN(Y1)$$

$$Y2(N+1)=A1-Y1$$

$$Y1(0)=0$$

$$Y2(0)=0$$

ДВУМЕРНЫЙ ФАЗОВЫЙ ПОРТРЕТ ДЛЯ ОТРЕЗКА ИТЕРИРОВАНИЯ ОТ 0 до 20000.



7.D-TORUS

$A1=2.2$
 $A2=0.205$

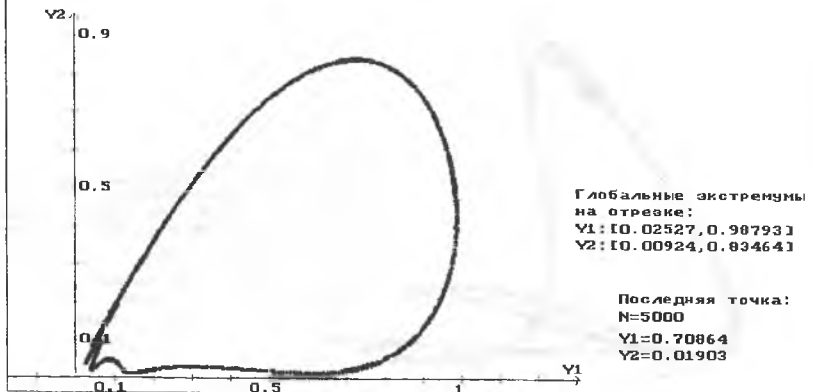
$$Y1(N+1)=Y2+A2*Y1$$

$$Y2(N+1)=A1*Y2*(1-Y1)$$

$$Y1(0)=0.1$$

$$Y2(0)=0.1$$

ДВУМЕРНЫЙ ФАЗОВЫЙ ПОРТРЕТ ДЛЯ ОТРЕЗКА ИТЕРИРОВАНИЯ ОТ 100 до 5000.



8. KAM-TORUS

$$Y1(N+1) = Y1 * \cos(A1) + (Y1 * Y1 - Y2) * \sin(A1)$$

$$Y2(N+1) = Y1 * \sin(A1) - (Y1 * Y1 - A2 * Y2) * \cos(A1)$$

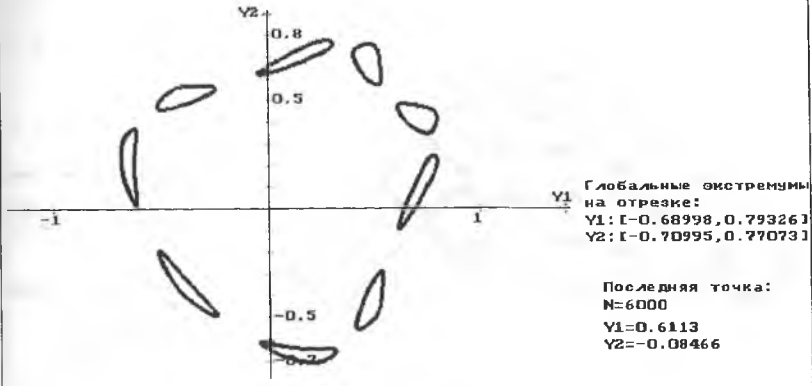
$$A1 = 1.48$$

$$A2 = 1$$

$$Y1(0) = -0.4$$

$$Y2(0) = -0.4$$

ДВУМЕРНЫЙ ФАЗОВЫЙ ПОРТРЕТ ДЛЯ ОТРЕЗКА ИТЕРИРОВАНИЯ ОТ 100 до 6000.



9. ХИЩНИК-ЖЕРТВА

$$Y1(N+1) = A1 * Y1 * (1 - Y1) - A2 * Y1 * Y2$$

$$Y2(N+1) = -A3 * Y2 + A4 * Y1 * Y2 - A5 * Y2 * Y2$$

$$A1 = 4$$

$$A2 = 1$$

$$A3 = 0.02$$

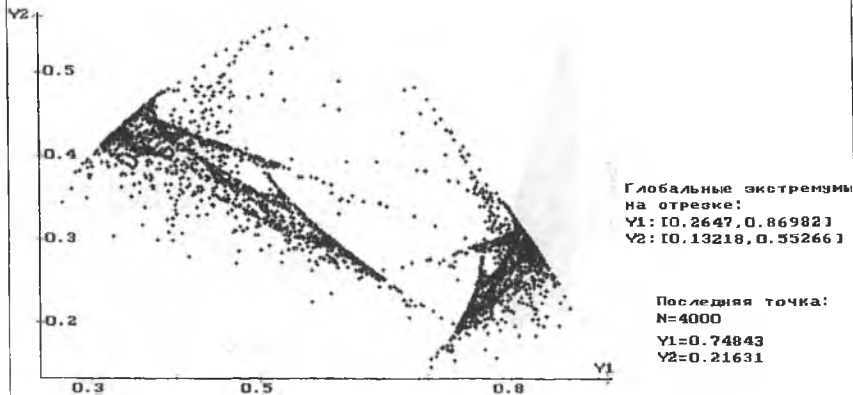
$$A4 = 1.92$$

$$A5 = 0.3$$

$$Y1(0) = 0.5$$

$$Y2(0) = 0.5$$

ДВУМЕРНЫЙ ФАЗОВЫЙ ПОРТРЕТ ДЛЯ ОТРЕЗКА ИТЕРИРОВАНИЯ ОТ 100 до 4000.



10. POPCORN

$$Y1(N+1) = Y1 - A1 * \sin(Y2 + \tan(A2 * Y2))$$

$$Y2(N+1) = Y2 - A1 * \sin(Y1 + \tan(A2 * Y1))$$

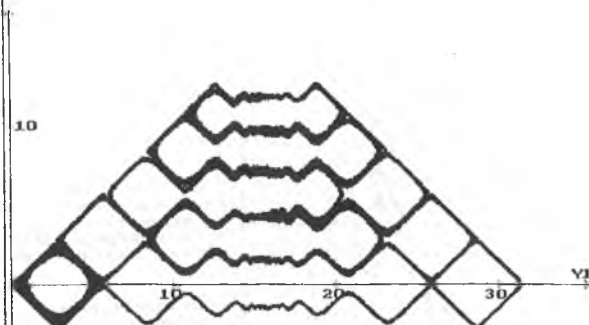
$$A1 = 0.05$$

$$A2 = 0.1$$

$$Y1(0) = 1$$

$$Y2(0) = 0$$

ДВУМЕРНЫЙ ФАЗОВЫЙ ПОРТРЕТ ДЛЯ ОТРЕЗКА ИТЕРИРОВАНИЯ ОТ 0 до 20000.



Глобальные экстремумы на отрезке:

$$Y1: [0.20853, 31.25]$$

$$Y2: [-2.66711, 12.53]$$

Последняя точка:

$$N = 20000$$

$$Y1 = 21.75641$$

$$Y2 = 7.07853$$

11. ПАРАЗИТ-ХОЗЯИН

$$Y1(N+1) = A1 * Y1 * (1 - Y1) - A2 * Y1 * Y2$$

$$Y2(N+1) = -A3 * Y2 + A4 * Y1 * Y2$$

$$A1 = 4$$

$$A2 = 1$$

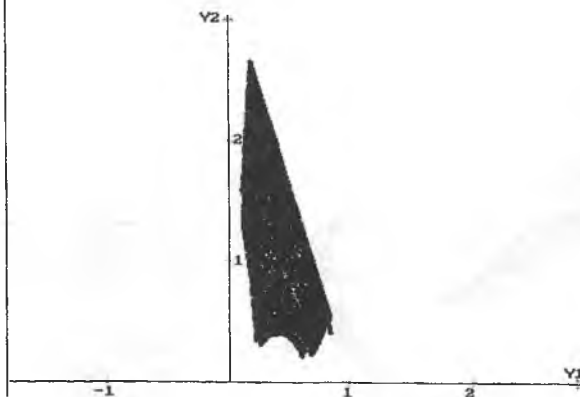
$$A3 = 0.17597$$

$$A4 = 3.6$$

$$Y1(0) = 0.2$$

$$Y2(0) = 0.2$$

ДВУМЕРНЫЙ ФАЗОВЫЙ ПОРТРЕТ ДЛЯ ОТРЕЗКА ИТЕРИРОВАНИЯ ОТ 100 до 11000.



Глобальные экстремумы на отрезке:

$$Y1: [0.10882, 0.83744]$$

$$Y2: [0.20501, 2.64787]$$

Последняя точка:

$$N = 11000$$

$$Y1 = 0.26048$$

$$Y2 = 0.48903$$

12. ZISOOK

$$Y1(N+1) = 2 * A1 * Y1 * (1 - Y1) - Y2$$

$$Y2(N+1) = A2 * Y1$$

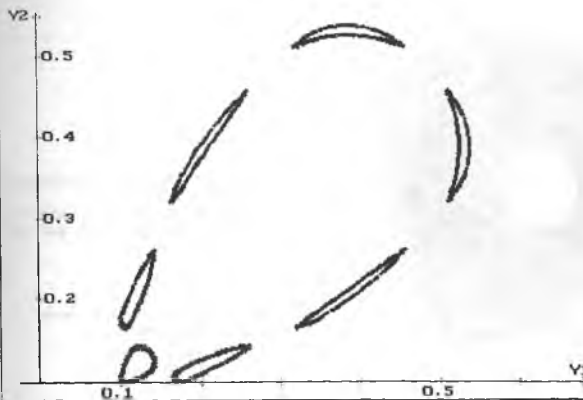
$$A1 = 1.55$$

$$A2 = 1$$

$$Y1(0) = 0.1$$

$$Y2(0) = 0.1$$

ДВУМЕРНЫЙ ФАЗОВЫЙ ПОРТРЕТ ДЛЯ ОТРЕЗКА ИТЕРИРОВАНИЯ ОТ 100 до 4000.



Глобальные экстремумы
на отрезке:
Y1: [0.09758, 0.53604]
Y2: [0.09758, 0.53604]

Последняя точка:
N=4000
Y1=0.50998
Y2=0.3188

13.1. МЭИ-97

$$Y1(N+1) = -Y2 + Y1 * (Y1 + Y2 - A1)$$

$$Y2(N+1) = Y1 + Y2 * (Y1 + Y2 - A2)$$

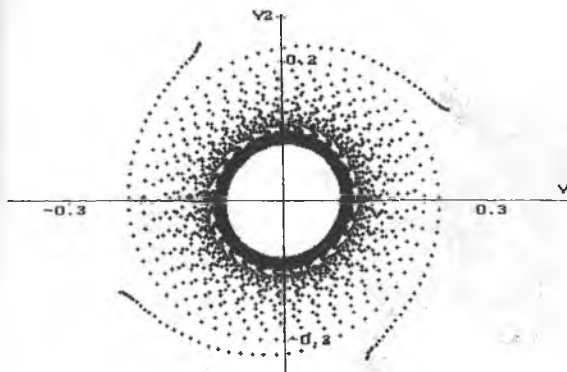
$$A1 = 0.007$$

$$A2 = 0.13$$

$$Y1(0) = 0.3$$

$$Y2(0) = 0.1$$

ДВУМЕРНЫЙ ФАЗОВЫЙ ПОРТРЕТ ДЛЯ ОТРЕЗКА ИТЕРИРОВАНИЯ ОТ 100 до 15000.



Глобальные экстремумы
на отрезке:
Y1: [-0.23171, 0.23279]
Y2: [-0.22612, 0.22511]

Последняя точка:
N=15000
Y1=0.05599
Y2=0.0655

13.2.МЭИ-97

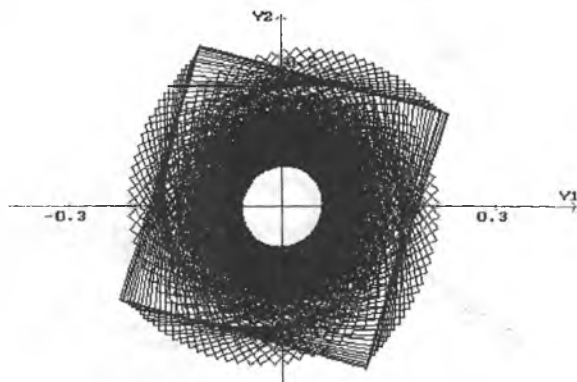
$$\begin{aligned} Y1(N+1) &= -Y2 + Y1 * (Y1 * Y1 + Y2 * Y2 - A1) \\ Y2(N+1) &= Y1 + Y2 * (Y1 * Y1 + Y2 * Y2 - A2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A1 &= 0.007 \\ A2 &= 0.13 \end{aligned}$$

$$Y1(0) = 0.3$$

$$Y2(0) = 0.1$$

ДВУМЕРНЫЙ ФАЗОВЫЙ ПОРТРЕТ ДЛЯ ОТРЕЗКА ИТЕРИРОВАНИЯ ОТ 100 до 15000.



Глобальные экстремумы
на отрезке:
Y1: [-0.23171, 0.23279]
Y2: [-0.22612, 0.22511]

Последняя точка:
N=15000
Y1=0.05599
Y2=0.0655

14.PICKOVER

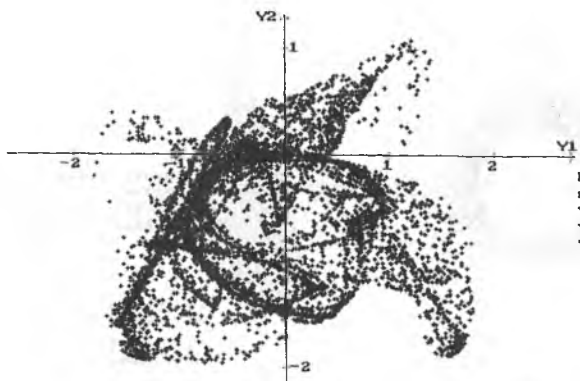
$$\begin{aligned} Y1(N+1) &= \sin(A1 * Y2) - Y3 * \cos(A2 * Y1) \\ Y2(N+1) &= Y3 * \sin(A3 * Y1) - \cos(A4 * Y2) \\ Y3(N+1) &= \sin(Y1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A1 &= 2 \\ A2 &= 1 \\ A3 &= 2 \\ A4 &= 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Y1(0) &= 0 \\ Y3(0) &= 0 \end{aligned}$$

$$Y2(0) = 0$$

ДВУМЕРНЫЙ ФАЗОВЫЙ ПОРТРЕТ ДЛЯ ОТРЕЗКА ИТЕРИРОВАНИЯ ОТ 100 до 10000.



Глобальные экстремумы
на отрезке:
Y1: [-1.8124, 1.78259]
Y2: [-1.96245, 1.07404]
Y3: [-1, 1]

Последняя точка:
N=10000
Y1=-1.25966
Y2=-1.01661
Y3=-0.67668

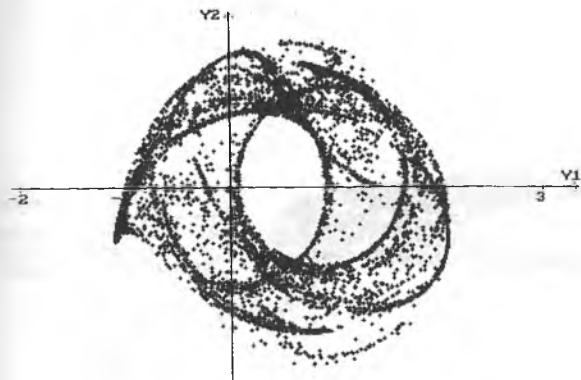
15. IKEDA

$$\begin{aligned} Y1(N+1) &= 1 + A2 * (Y1 * \cos(Y3) - Y2 * \sin(Y3)) \\ Y2(N+1) &= A2 * (Y1 * \sin(Y3) + Y2 * \cos(Y3)) \\ Y3(N+1) &= A1 - A3 / (1 + Y1 * Y1 + Y2 * Y2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A1 &= 8.4 \\ A2 &= -1 \\ A3 &= 4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Y1(0) &= 0.1 & Y2(0) &= 0.1 \\ Y3(0) &= 0.1 \end{aligned}$$

ДВУМЕРНЫЙ ФАЗОВЫЙ ПОРТРЕТ ДЛЯ ОТРЕЗКА ИТЕРИРОВАНИЯ ОТ 100 до 8000.



Глобальные экстремумы
на отрезке:
Y1: [-1.10619, 2.08864]
Y2: [-1.67383, 1.38155]
Y3: [4.40083, 7.69679]

Последняя точка:
N=8000
Y1=-1.00146
Y2=-0.28454
Y3=7.61365

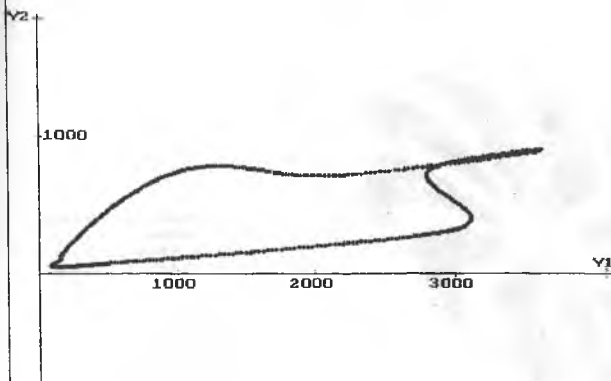
16. DIAPAUSA

$$\begin{aligned} Y1(N+1) &= A1 * Y1 + A2 * Y3 \\ Y2(N+1) &= A1 * Y1 + (1 - A1) * Y3 \\ Y3(N+1) &= A2 * Y2 * \exp(-A3 * (1 - Y2)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A1 &= 0.2 \\ A2 &= 9 \\ A3 &= -0.01 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Y1(0) &= 0.1 & Y2(0) &= 0.1 \\ Y3(0) &= 0.1 \end{aligned}$$

ДВУМЕРНЫЙ ФАЗОВЫЙ ПОРТРЕТ ДЛЯ ОТРЕЗКА ИТЕРИРОВАНИЯ ОТ 1000 до 5000.



Глобальные экстремумы
на отрезке:
Y1: [78.4, 3629.58]
Y2: [42.75, 888.97]
Y3: [1.11361, 334.42]

Последняя точка:
N=5000
Y1=117.52574
Y2=42.76561
Y3=294.14799

17.PAX

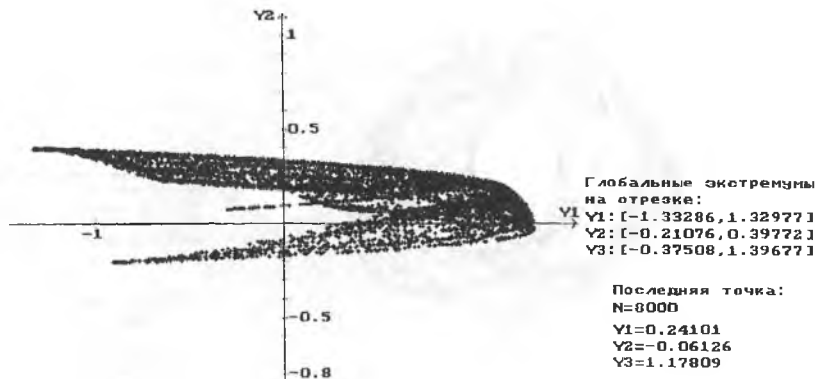
$$\begin{aligned} Y1(N+1) &= 1 - A1 * Y1 * Y1 + Y2 \\ Y2(N+1) &= A2 * (Y1 + Y3) / 2 \\ Y3(N+1) &= 1 - A3 * Y3 * Y3 + Y2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A1 &= 1.3 \\ A2 &= 0.3 \\ A3 &= 0.6 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Y1(0) &= 0 \\ Y3(0) &= 0 \end{aligned}$$

$$Y2(0) = 0$$

ДВУМЕРНЫЙ ФАЗОВЫЙ ПОРТРЕТ ДЛЯ ОТРЕЗКА ИТЕРИРОВАНИЯ ОТ 1000 ДО 8000.



18.BALL

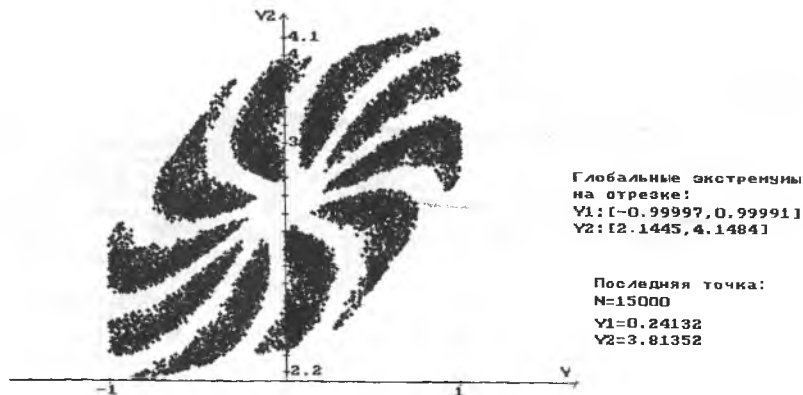
$$\begin{aligned} Y1(N+1) &= \text{FRAC}((1+A1)*Y1+A2*\text{SIN}(Y2)) \\ Y2(N+1) &= Y2+\text{FRAC}((1+A1)*Y1+A2*\text{SIN}(Y2)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A1 &= 0.1 \\ A2 &= 1.5 \end{aligned}$$

$$Y1(0) = 0.1$$

$$Y2(0) = 0.1$$

ДВУМЕРНЫЙ ФАЗОВЫЙ ПОРТРЕТ ДЛЯ ОТРЕЗКА ИТЕРИРОВАНИЯ ОТ 1000 ДО 15000.



19. KAPLAN-YORKE

$$Y1(N+1) = \text{FRAC}(A2 * Y1)$$

$$Y2(N+1) = A1 * Y2 + \cos(2 * \pi * Y1)$$

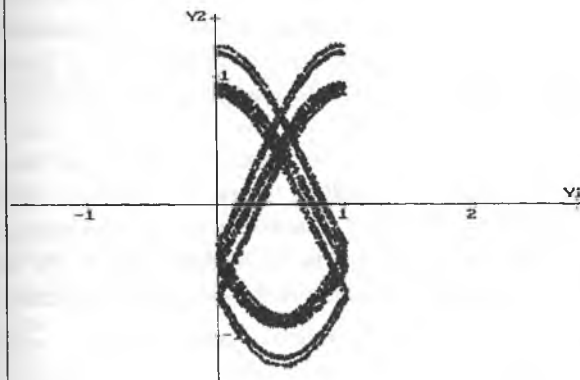
$$A1 = 0.2$$

$$A2 = 3$$

$$Y1(0) = 0.1$$

$$Y2(0) = 0.1$$

ДВУМЕРНЫЙ ФАЗОВЫЙ ПОРТРЕТ ДЛЯ ОТРЕЗКА ИТЕРИРОВАНИЯ ОТ 100 до 5000.



Глобальные экстремумы на отрезке:

$$Y1: [0.00113, 0.99963]$$

$$Y2: [-1.2471, 1.24523]$$

Последняя точка:
N=5000

$$Y1 = 0.16958$$

$$Y2 = -0.31204$$

20. ZASLAVSKY

$$Y1(N+1) = \exp(-A1) * (Y1 + A2 * \sin(2 * \pi * Y2))$$

$$Y2(N+1) = \text{FRAC}(Y2 + A3 / (2 * \pi)) * (1 + (1 - \exp(-A1)) / A1 * Y1) + A4 / A1 * \sin(2 * \pi * Y2)$$

$$Y1(0) = 0.3$$

$$Y2(0) = 0.1$$

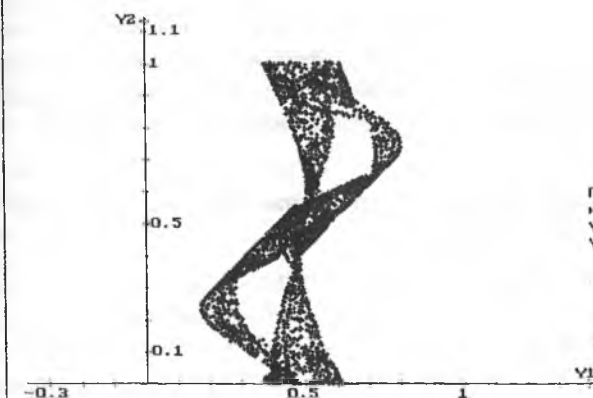
$$A1 = 0.01$$

$$A2 = 0.3$$

$$A3 = 6.28$$

$$A4 = 0.0001$$

ДВУМЕРНЫЙ ФАЗОВЫЙ ПОРТРЕТ ДЛЯ ОТРЕЗКА ИТЕРИРОВАНИЯ ОТ 100 до 5000.



Глобальные экстремумы на отрезке:

$$Y1: [0.17121, 0.80194]$$

$$Y2: [1.6E-05, 0.99984]$$

Последняя точка:
N=5000

$$Y1 = 0.44316$$

$$Y2 = 0.527$$

Раздел 5. Словарь терминов нелинейной динамики

Словарь составлен на основании теоретических сведений, приведенных, главным образом, в [3]-[5] и дополняет словарь учебного пособия [11].

Аттрактор - множество точек в фазовом пространстве диссипативной системы, к которому стремятся со временем (притягиваются) все фазовые траектории из некоторой области, называемой областью (бассейном) притяжения. Аттракторы подразделяются на простые (к ним относятся устойчивые: особая или неподвижная точка, предельный цикл, тор) и странные. Набор изолированных неподвижных точек не является единым аттрактором. Фазовый объем, занимаемый траекториями на произвольном аттракторе, равен нулю, поэтому размерность аттрактора меньше (а часто существенно меньше), чем размерность исходного фазового пространства.

Бифуркационная диаграмма - графическое представление любого характерного свойства ограниченных решений нелинейной модели как функции бифуркационного параметра. Примеры характерных свойств (на асимптотической стадии): 1) количество экстремумов решения и значение каждого экстремума; 2) значение максимального показателя Ляпунова. Свойства 1) и 2) характеризуют поведение модели и могут быть различными при различных значениях параметра.

Бифуркация - внезапное изменение качественного поведения решения динамической системы при достижении некоторого критического значения одним из параметров системы; такой параметр называется бифуркационным, а соответствующая точка в пространстве параметров, в которой происходит такое изменение, называется точкой бифуркации. Из точки бифуркации исходят несколько (2 или более) ветвей решения, устойчивых или неустойчивых.

Бифуркация Хопфа-Андропова - рождение предельного цикла из неподвижной точки (точки равновесия).

Временной (дискретный) ряд - последовательность вещественных чисел, $x_1, x_2, \dots, x_n$ получаемых следующим образом. Имеется зависящий от времени сигнал $x(t)$, непрерывный по t , который получается в результате физического эксперимента, длящегося в течение времени t^* ; делается выборка n значений $x(t)$ через равные промежутки времени Δt , ($\Delta t = t^*/n$); в итоге имеем последовательность x_j , $j=1, 2, \dots, n$.

Гомеоморфизм - взаимно однозначное и взаимно непрерывное отображение одного множества на другое; одно из основных понятий

топологии. Примеры: функция $1/(e^x+1)$ устанавливает отображение числовой прямой на отрезок $[0,1]$, круг гомеоморфен любому выпуклому многоугольнику.

Детерминированная система - динамическая система, для которой математическая модель определена, начальные условия и параметры известны и не являются стохастическими (случайными).

Динамические переменные - набор величин, характеризующих любое состояние динамической системы.

Динамические системы (ДС) - системы любой природы (физической, химической, биологической, экономической и т.д.), поведение которых задается некоторым набором правил (алгоритмом). Наиболее часто ДС математически описываются в виде систем обыкновенных дифференциальных или разностных уравнений (обратимых, необратимых, автономных и неавтономных), и систем дифференциальных уравнений в частных производных. Область исследования теории ДС охватывает анализ всех зависящих от времени явлений.

Динамический (или детерминированный) хаос - нерегулярное, неупорядоченное, непредсказуемое, кажущееся случайным поведение относительно простой динамической системы (образно: "рождение случайного из неслучайного"). Математическими моделями таких простых систем являются "маломерные" точечные нелинейные дифференциальные ($N \geq 3$) и разностные ($N \geq 1$) уравнения, где N - размерность фазового пространства.

Диссипативная разностная система - нелинейная система вида $X_{n+1} = f(X_n)$, размерности N , у которой якобиан $J < 1$ (это условие эквивалентно требованию уменьшения фазового объема в пространстве R^N при $n \rightarrow \infty$ [22]).

Диссипативные структуры - пространственные образования в диссипативной неравновесной среде, не изменяющиеся со временем; возникают в результате развития пространственно неоднородных неустойчивостей с их последующей стабилизацией за счет баланса между диссипативными потерями и поступлением энергии (или вещества) от источника неравновесности.

Жюлиа множество - граница той области (x, y) на комплексной Z -плоскости, точки которой при итерациях комплексно-значного отображения $Z_{n+1} = Z_n^2 + C$ (C - комплексная постоянная) стремятся к бесконечно удаленной точке; в зависимости от выбора C множество Жюлиа может быть связным (фрактальная кривая) или несвязным ("пыль" - бесконечное множество

точек); множество значений C , при которых Ж.м. связно, называется множеством Мандельброта.

Изображающая точка - точка в N -мерном фазовом пространстве точечной модели, соответствующая текущему состоянию динамической системы.

Квазипериодическая функция - функция $f(t)$, описывающая колебания с двумя и более несоизмеримыми частотами (периодами). Пример $y = \sin(t) + \cos(\sqrt{3}t)$ - квазипериодическая функция с периодами 2π и $2\pi/\sqrt{3}$.

Канторово множество (впервые описано Георгом Кантором в 1883 г.) - пример фрактального множества. Канторово множество строится следующим образом: берется отрезок длины 1, делится на 3 равные части и выбрасывается средняя часть. Получаются 2 отрезка длиной $1/3$; каждый из них снова делится на 3 равные части и выбрасываются средние части и т.д. На каждом шаге число отрезков удваивается, а их общая длина уменьшается на $1/3$. В пределе полная длина Канторова множества стремится к 0, хотя его размерность $d=0.63...$

Консервативная разностная система - нелинейная система вида $X_{n+1} = f(X_n)$ размерности N , у которой якобиан $J=1$ (это условие эквивалентно требованию сохранения фазового объема в пространстве R^N при $n \rightarrow \infty$ [22]).

Кривая Кох (описана Хельгой фон Кох в 1904 г.) - пример фрактальной кривой: непрерывной, но нигде не дифференцируемой. Кривая Кох строится следующим образом. Берется отрезок длины 1 и делится на 3 равные части; затем средняя часть выбрасывается и вместо нее строятся 2 стороны (длиной по $1/3$ каждая) равностороннего треугольника - получается 4 звена длиной $1/3$. Этот процесс повторяется на каждом полученном звене многократно. В пределе получаем непрерывную кривую с ненулевой площадью. Фрактальная размерность d кривой Кох больше 1, но меньше 2.

Мандельброта множество - (описано Б.Мандельбротом в 1977 г.) - множество тех значений комплексной константы C в комплексно-значном отображении $Z_{n+1} = Z_n^2 + C$, при которых множество Жюлиа связно. Доказано, что множество Мандельброта представляет собой совокупность тех значений константы C , при которых все Z_n остаются ограниченными при $n \rightarrow \infty$, если начальное условие - нулевое ($0+0i$).

Многообразие - подпространство фазового пространства, в котором остаются решения дифференциальных или разностных уравнений, если начальные условия были выбраны в данном подпространстве.

Модели (системы) с распределенными параметрами - математические модели, описываемые уравнениями и системами уравнений в частных производных, в которых независимыми переменными являются время и не менее одной пространственной координаты; распределенными параметрами здесь называются состояния модели, которые в каждый момент времени суть функции одной или нескольких пространственных переменных; фазовое пространство состояний имеет бесконечную размерность.

Модели (системы) с сосредоточенными параметрами - см. точечные динамические модели (системы).

Нелинейная динамика - наука, имеющая междисциплинарный характер и изучающая поведение нелинейных динамических систем (НДС) во времени и пространстве в зависимости от изменения начальных состояний и внешних воздействий, задаваемых параметрически.

Нелинейность - свойство любой системы со "входом" и "выходом" (или свойство математической операции), у которой сигнал на "выходе" (результат операции) не пропорционален сигналу на "входе" (величине операнда). Примеры нелинейных математических операций: $Y=C \cdot X^n$, при $n \neq 0, 1$; $Y=|X|$; $Y=\sin(X)$; $Y=X \cdot (dX/dT)$, $Y=C \cdot (dX/dT)^2$.

Необратимое отображение - отображение из множества А в множество В, для которого у каждого элемента множества В существуют 2 и более прообразов в множестве А. Пример: логистическое отображение.

Отображение - математическое правило, ставящее в соответствие одному множеству точек другое множество точек; при многократном повторении (итерации) такого правила отображение аналогично системе разностных уравнений.

Отображение (сечение) Пуанкаре - последовательность точек в фазовом пространстве, порождаемая пересечением траектории решения системы ОДУ с поверхностью общего вида или плоскостью в том же фазовом пространстве.

Обратимое (или биективное) отображение - отображение из множества А в множество В, для которого у каждого элемента множества В существует единственный прообраз в множестве А. Если отображение есть числовая функция $f(x)$, то для обратимости $f(x)$ должна быть строгой монотонной.

Пример: отображение вращения на угол α : $\varphi \rightarrow \varphi + \alpha$.

Орбита - синоним терминов: фазовая траектория, фазовая кривая. Замкнутая орбита в пространстве R^N топологически может представлять собой окружность или эллипс и тогда она называется однооборотной, либо спираль и тогда она называется многооборотной.

Парадигма - концептуальная физическая или математическая модель, которая охватывает основные свойства целого класса задач. Парадигмами нелинейной динамики являются три модели: 1) система ОДУ Э.Лоренца (1963 г.), 2) логистическое разностное уравнение М.Фейгенбаума (1978 г.), 3) двумерное отображение Энона (1976 г.)

Перемежаемость - тип хаотического поведения динамической системы, при котором длительные временные интервалы определенной регулярной эволюции (например, периодического или квазипериодического движения) сменяются короткими по времени и как бы случайными всплесками; интервалы между всплесками и длительность последних непредсказуемы.

Переходный хаос - поведение динамической системы, которое на конечном интервале времени выглядит как хаотическое (т.е. траектории как бы движутся по странному аттрактору), но затем траектория выходит на один из простых аттракторов и там остается при $t \rightarrow \infty$.

Показатели Ляпунова - одно из средств количественной характеристики аттракторов; это - N чисел, служащих мерой экспоненциального сближения или разбегания со временем двух соседних траекторий в фазовом пространстве размерности N с различными начальными условиями; максимальный ляпуновский показатель определяется формулой $L = \lim_{t \rightarrow \infty} \log_2(r(t)/r(0))$ при $t \rightarrow \infty$, где $r(t)$ - расстояние между траекториями в момент времени t . При $L > 0$ поведение хаотично, при $L \leq 0$ - регулярно.

Предельный цикл - один из аттракторов диссипативной системы ОДУ; соответствует устойчивому периодическому решению.

Репеллеры - множество точек в фазовом пространстве диссипативной системы, от которых отталкиваются все или почти все соседние фазовые траектории. Простейшими репеллерами являются: неустойчивая неподвижная (особая) точка, неустойчивый цикл, неустойчивый тор. Фазовый объем, занимаемый траекториями на репеллерах (как и на аттракторах) равен нулю, т.е. размерность репеллера меньше размерности исходного фазового пространства. Пример: репеллеры для отображения $x_{n+1} = x_n \cdot \text{abs}(x_n)$ - это неподвижные точки $x = \pm 1$.

Самоорганизация - процесс установления из неупорядоченного, хаотичного состояния диссипативных систем (даже очень сложных) упорядоченного, регулярного, предсказуемого поведения во времени или определенной структуры в пространстве, иногда вопреки различным флуктуациям и шумам.

Сигнал - некоторая физическая величина, изменяющаяся во времени; обеспечивает передачу информации. Пример: акустические и электромагнитные колебания.

Синергетика - недавно появившийся новый термин (его ввел Г.Хакен в 70-х годах); пока не имеет общепринятого определения. Впервые термином "синергетика" стала называться теория кооперативных явлений в задачах лазерной техники; постепенно синергетика приобрела статус более общей теории, описывающей незамкнутые, нелинейные, неустойчивые, иерархические системы. В настоящее время существуют две концепции синергетики. Синергетика в узком смысле - научная дисциплина, изучающая необратимый динамический хаос и возникновение упорядоченных (точнее - диссипативных) структур в открытых системах за счет взаимодействия со средой. В широком смысле синергетику понимают как молодое направление нелинейной динамики или как междисциплинарный подход в изучении эволюции и самоорганизации сложных систем мира. Синергетика объединяет достижения современного нелинейного и системного анализа, кибернетики, геометрии фракталов, теорий динамического хаоса и диссипативных структур.

Странный аттрактор - притягивающее множество в фазовом пространстве диссипативной системы, по которому движутся хаотические траектории; впервые термин введен Д.Рюэлем и Ф.Такенсом в 1971 г.; они определили С.а. как произведение многообразия на Канторово множество; по Б.Мандельброту - С.а. - это фрактал.

Странный аттрактор, являясь аттрактором, занимает ограниченную область фазового пространства; он состоит как бы из одной траектории без самопересечений, т.е. хаотическая траектория с течением времени должна пройти через каждую точку аттрактора; необычность (странность) такого аттрактора - в обладании свойством чувствительной зависимости от начальных условий (ЧЗНУ), взятых на С.а.

Топологическая эквивалентность потоков $\{f^t\}$ и $\{g^t\}$ - свойство, означающее, что существует гомеоморфизм $h: R^N \rightarrow R^N$, переводящий поток $\{f^t\}$ в поток $\{g^t\}$. Отображение h переводит фазовые траектории одного потока в фазовые траектории другого потока.

Топология - раздел математики. Предмет топологии - исследование свойств фигур и их взаимного расположения, сохраняющихся гомеоморфизмами. Главная задача топологии - выделение и изучение топологических инвариантов (например, связность, размерность,

компактность), сохраняющихся любыми гомеоморфизмами одного топологического пространства на другое.

Тор - тело в пространстве R^N , образуемое вращением в R^N шара размерности $N-1$ вокруг прямой, лежащей в гиперплоскости шара, но не пересекающей его. Приблизительно форму тора в пространстве R^3 имеют, например, баранка, бублик, спасательный круг. Иногда поверхность, ограничивающую тор, также называют тором. T^{N-1} - обозначение тора в R^N .

Точечные динамические модели (системы) - математические модели, описываемые конечным числом обыкновенных дифференциальных уравнений или разностных уравнений (итерируемых отображений), в которых независимой переменной является время t - непрерывное или дискретное, а зависимыми переменными - состояния модели. В научной литературе по нелинейной динамике точечные модели иногда называют моделями с сосредоточенными параметрами (состояниями) в отличие от моделей с распределенными параметрами; последние модели описываются уравнениями в частных производных.

Траектория на торе T^2 - двоякопериодическое решение нелинейной динамической системы с двумя основными частотами f_1 и f_2 ; одно из возможных параметрических представлений траектории на T^2 имеет вид: $y_i = a_i \sin(2\pi f_1 t + \alpha_i) + b_i \sin(2\pi f_2 t + \beta_i)$, где $a_i, b_i, \alpha_i, \beta_i$ - вещественные константы, $i=1,2,3$, (y_1, y_2, y_3) - координаты в фазовом пространстве R^3 .

Фазовая точка - см. изображающая точка.

Фазовая траектория - последовательные положения (след движения) изображающей точки точечной динамической модели в фазовом пространстве для всех моментов времени; описывает эволюцию модели.

Фазовое пространство - пространство динамических переменных, полностью определяющих поведение ДС (фазой в XIX веке называлось состояние системы в момент времени t).

Фазовый портрет - структура разбиения фазового пространства динамической системы на фазовые траектории; математический образ эволюции ДС. Геометрическое изображение отдельных состояний (например, периодических и хаотических) позволяет определить поведение ДС в зависимости от значений параметров (см. [3]).

Фазовый поток - отображение сдвига (или оператор эволюции) $F^{-1} : \Phi \rightarrow \Phi$, где $F(t, x_0)$ - решение системы ОДУ $\dot{x} = f(x)$ с фазовым пространством Φ ; этот оператор переводит систему из состояния x_0 , в котором она

находилась в момент времени t_0 , в состоянии в момент времени t : $F'x_0=x(t)$; функцию $f(x)$ называют векторным полем фазовой скорости данной динамической системы с фазовым пространством $\Phi \subseteq \mathbb{R}^N$.

Флуктуации - некоторые неконтролируемые воздействия на ДС.

Фрактал - новый термин; пока не имеет четкого определения. По М.Мандельброту (ввел термин в 60-х годах) фрактал - это структура, состоящая из частей, которые в каком-то смысле подобны целому. Различают геометрические, регулярные фракталы (примеры: фигуры Х.Кох, множества Кантора, Мандельброта, Жюлиа) и естественные, природные - зернистые, морщинистые, гидроподобные образования (примеры: береговые линии, кораллы, облака, пористые среды, трещины). Регулярный фрактал представляет собой множество точек в N-мерном пространстве, обладающее геометрическим свойством самоподобия при различных масштабах и нецелой метрической (фрактальной) размерностью, меньшей, чем N (см. [4]). Фракталы в нелинейной динамике - типичные стохастические структуры на странных аттракторах - сложных, многолистных множествах, напоминающих лабиринты или запутанные клубки.

ЧЗНУ (чувствительная зависимость от начальных условий) - свойство диссипативной динамической системы, обладающей хаотическим поведением; оно означает, что первоначально сколь угодно близкие траектории на странном аттракторе со временем разбегаются по экспоненциальному закону, оставаясь на странном аттракторе.

Эволюционный процесс - процесс, изменяющийся во времени.

Эффект бабочки - свойство необычайно чувствительной зависимости динамической системы от малых возмущений в случае неустойчивости; эффект отмечен и так назван Э.Лоренцем применительно к проблеме долгосрочного прогноза погоды (ассоциация с событиями одного из рассказов Р.Бредбери). Аналогичен свойству ЧЗНУ.

Якобиан, определитель Якоби - функциональный определитель

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_N} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial x_N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_N}{\partial x_1} & \frac{\partial f_N}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_N}{\partial x_N} \end{vmatrix} \quad \text{для } N \text{ функций } y_i=f_i(x_1, x_2, \dots, x_N), i=1, 2, \dots, N, \text{ имеющих}$$

частные производные 1-го порядка по всем x_i . Абсолютная величина $|J|$ характеризует растяжение (сжатие) элементарного объема при переходе от

переменных x_i к переменным u_j . Например, при каждой итерации N-мерных отображений N-мерные объемы умножаются на коэффициент $|J|$: при $|J| < 1$ они уменьшаются, при $|J| > 1$ - увеличиваются, а при $|J| = 1$ - остаются без изменений.

Литература

1. Самарский А.А., Михайлов А.П. Математическое моделирование. Идеи. Методы. Примеры. - М.: Наука, Физматлит, 1997.
2. Динамические системы. - М.: Изд-во ВИНТИ. (Итоги науки и техники. Сер.Современные проблемы математики. Фундаментальные направления.) т.т. 1 - 4, 1985; т.5, 1986.
3. Неймарк Ю.И., Ланда П.С. Стохастические и хаотические колебания. - М.: Наука, 1987.
4. Мун Ф. Хаотические колебания. - М.: Мир, 1992.
5. Берже П., Помо И., Видаль К. Порядок в хаосе. О детерминистском подходе к турбулентности. - М.: Мир, 1991.
6. Лоскутов А.Ю., Михайлов А.С. Введение в синергетику. - М.: Наука, 1990.
7. Капица С.П., Курдюмов С.П., Малинецкий Г.Г. Синергетика и прогнозы будущего. - М.: Наука, 1997.
8. Петров А.А. Экономика. Модели. Вычислительный эксперимент. - М.: Наука, 1997.
9. Малинецкий Г.Г. Задачи по курсу нелинейной динамики. - М.: ИПМ им. М.В.Келдыша. Препринт №62, 1995.
10. Малинецкий Г.Г. Хаос, структуры, вычислительный эксперимент. Введение в нелинейную динамику. - М.: Наука, 1997.
11. Павлов Б.М. Вычислительный практикум по исследованию нелинейных динамических систем (самоорганизация во времени). - М.: МГУ им. М.В.Ломоносова, 1996.
12. Павлов Б.М., Новиков М.Д., Лысенко В.Б. Автоматизированные практикумы в обучении информатике и прикладной математике. - Тр. IV Международной конференции "Математика. Компьютер. Образование", 1997, с. 200-202.
13. Павлов Б.М., Новиков М.Д. Программный комплекс для изучения нелинейных математических моделей. - "Математика. Компьютер. Образование". Под редакцией Г.Ю.Ризниченко. Вып.5. Часть 1. М.: Изд-во Прогресс-Традиция, 1998, с. 80-85.
14. Неймарк Ю.И. Метод точечных отображений в теории нелинейных колебаний. - М.: Наука, 1972.
15. Ризниченко Г.Ю., Рубин А.Б. Математические модели биологических продукционных процессов. Учебное пособие. - М.: Изд-во МГУ, 1993.
16. Марчук Г.И. Математические модели в иммунологии. Вычислительные методы и эксперименты. - М.: Наука, 1991.

17. Колесов А.Ю., Колесов Ю.С. Релаксационные колебания в математических моделях экологии. Труды Математического ин-та им. В.А.Стеклова, СХСІХ. - М.: Наука, 1993.
18. Осипов В.И. Дискретная модель динамики популяции с диапаузой. В кн "Математические модели в экологии и генетике". - М.: Наука, 1981, сс.103-104.
19. Колупаев А.Г., Чернавский Д.С. Моделирование систем с перемешиванием на персональном компьютере. - Тезисы V Международной конференции "Математика. Компьютер. Образование". Дубна, 26-30 января 1998, с. 98.
20. Морозов К.А., Мякишев Ю.В. Одномерные и двумерные итерации. Тезисы V Международной конференции "Математика. Компьютер. Образование". Дубна, 26-30 января 1998, с.143.
21. Березин И.С., Жидков Н.П. Методы вычислений. Том 2. - М.:Изд-во физ.-мат. литературы, 1962.
22. Ланда П.С. Нелинейные колебания и волны. - М.:Наука, Физматлит, 1997.
23. Арнольд В.И. Обыкновенные дифференциальные уравнения (изд-во 3-е). - М.:Наука, 1984.
24. Эрроусмит Д., Плейс К. Обыкновенные дифференциальные уравнения (качественная теория с приложениями). - М.: Изд-во ПЛАТОН. 1997.
25. Бугенин Н.В., Неймарк Ю.И., Фуфаев Н.А. Введение в теорию нелинейных колебаний. - М.: Наука, 1987.
26. Тюрин Ю.Н., Макаров А.А. Статистический анализ данных на компьютере. - М.:ИНФРА-М, 1998.
27. Князева Е.Н., Курдюмов С.П. Законы эволюции и самоорганизации сложных систем. - М.:Наука, 1994.
28. Федер Е. Фракталы. - М.:Мир, 1991.
29. Каданов Л.П. Пути к хаосу. /Физика за рубежом.85. - М.: Мир, 1985.
30. Форсайт Дж., Малькольм М., Моулер К. Машинные методы математических вычислений. - М.:Мир, 1980.



202